

# Approximation diophantienne et distribution locale sur une surface torique

Zhizhong Huang  
*Institut Fourier*  
*Université Grenoble Alpes*  
 zhizhong.huang@univ-grenoble-alpes.fr

3 mars 2017

## Résumé

Nous étudions dans ce texte l'approximation diophantienne et la distribution locale en un point rationnel sur une surface torique obtenue comme un éclatement de  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ . Il s'avère qu'en dehors d'un fermé de Zariski les meilleures approximations s'obtiennent à l'aide d'une famille de courbes nodales. L'étude se ramène donc à la question de la distribution locale en un point quadratique sur la droite projective.

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction et Heuristique</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Constantes d'approximation</b>	<b>5</b>
2.1	Constante d'approximation et constante essentielle . . . . .	5
2.2	Opération de zoom . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Solutions des équations de Pell-Fermat</b>	<b>8</b>
3.1	Rappels sur la théorie algébrique des corps de nombres quadratiques . . . . .	8
3.2	Équations de Pell-Fermat généralisées . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Zoom sur les nombres algébriques</b>	<b>12</b>
4.1	Cas critique pour des nombres quadratiques . . . . .	12
4.2	Zoom sous-critique . . . . .	17
4.3	Généralisation à un réseau . . . . .	26
4.4	Perspective . . . . .	34
<b>5</b>	<b>Distribution locale sur la surface torique <math>Y_4</math></b>	<b>34</b>
5.1	Géométrie de $Y_4$ et courbes rationnelles sur $Y_4$ . . . . .	34
5.2	Détermination des constantes d'approximation . . . . .	36
5.3	Zoom sur la surface $Y_4$ . . . . .	38
5.4	Interprétation en terme d'ensemble mince . . . . .	47
5.5	Autres variétés toriques . . . . .	48
<b>A</b>	<b>Distribution locale des <math>\mathbb{Q}</math>-points sur la droite projective</b>	<b>50</b>
A.1	Énoncé du théorème . . . . .	50
A.2	Démonstration du théorème . . . . .	50
A.3	À propos des mesures limites . . . . .	52
<b>B</b>	<b>Le problème des diviseurs pour des formes binaires cubiques déployées</b>	<b>52</b>
B.1	Énoncé du résultat . . . . .	52
B.2	Préliminaires et résultats connus . . . . .	53
B.3	Démonstration des formules asymptotiques . . . . .	55
	<b>Références</b>	<b>62</b>

# 1 Introduction et Heuristique

L'étude de la distribution des points rationnels sur les variétés algébriques est un sujet classique de la géométrie diophantienne. Beaucoup de variétés dont le fibré anticanonique est gros vérifient le principe de Batyrev-Manin [2] avec la constante de Peyre [21], y compris les variétés toriques lisses projectives (voir [6] pour des exemples). Plus précisément, soit  $X$  une telle variété définie sur un corps de nombres  $k$  munie d'une hauteur de Weil  $H$  associée au fibré anticanonique  $\omega_X^{-1}$ . On dit que  $X$  vérifie le principe de Batyrev-Manin s'il existe un ouvert dense  $U$  de  $X$  tel que

$$\#U_{H \leq B} = \#\{x \in U(k) : H(P) \leq B\} \sim C(X)B(\log B)^{\text{rg}(\text{Pic}(X))-1},$$

où la constante  $C(X)$  a reçu une interprétation géométrique (cf. [21],[22]). La raison pour laquelle on ne considère pas tous les points de la variété est que souvent il existe des sous-variétés, que l'on appelle ici *globalement accumulatrice*, dont la croissance du nombre de points rationnels domine celle d'un ouvert dense. On peut définir certaines constantes (par exemple, la constante  $\beta$  dans [2]) pour détecter de telles variétés. Soit  $U$  l'ouvert privé de toutes les sous-variétés globalement accumulatrices (si un tel ouvert existe). Une extension naturelle de ce problème est de considérer la convergence au sens faible de la suite de mesures de probabilité

$$\mu_{U_{H \leq B}} = \frac{1}{\#U_{H \leq B}} \sum_{x \in U(k), H(x) \leq B} \delta_x. \quad (1.1)$$

Si cette suite de mesures converge, elle reflète un phénomène d'équidistribution, et en regardant la densité de la mesure limite on peut obtenir une caractérisation de la « concentration » des points rationnels. Peyre [21] a conjecturé une mesure limite, appelée mesure de Tamagawa.

Ce texte est concerné par un autre aspect, à savoir le problème de la distribution *locale* des points rationnels autour d'un point rationnel fixé. Le terme « local » est au sens de l'approximation diophantienne systématiquement formulé en premier par D. McKinnon et M. Roth ([18], [19]). Une différence majeure par rapport aux problèmes globaux est que même s'il n'existe pas de sous-variétés globalement accumulatrices, il peut y avoir des sous-variétés qui sont *localement* accumulatrices. Moralement, les meilleurs approximations ne peuvent être choisis que sur telles sous-variétés. Comme dans le problème global, on peut aussi définir certaines constantes, appelées maintenant *les constantes d'approximation*, pour les caractériser. L'une de ces constantes, appelée *la constante d'approximation*  $\alpha(Q, X)$  (Définition 2.2), caractérise la meilleure approximation. La deuxième constante, appelée *la constante essentielle*  $\alpha_{\text{ess}}(Q)$  (Définition 2.3), décrit des approximations génériques. Au niveau de la distribution plus fine, S. Pagelot [20] a étudié en premier *la distribution locale* des points rationnels sur certaines variétés algébriques via une opération appelée « zoom ». Le but est de dénombrer et localiser asymptotiquement les points le plus proches d'un point rationnel fixé. Elle nous permet d'obtenir plus d'informations sur la concentration locale des points rationnels que les constantes d'approximation car il existe des sous-variétés ayant la même constante d'approximation, sur lesquelles le nombre d'approximations qui se trouvent étant d'ordre de grandeur différente. On propose une définition (Définition 2.7) basée sur ce fait pour les caractériser.

Dans ce texte on se placera sur une surface torique définie sur  $\mathbb{Q}$  que l'on notera toujours  $Y_4$ . Elle est obtenue en éclatant les 4 points invariants de  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ , à qui correspond aux éventails

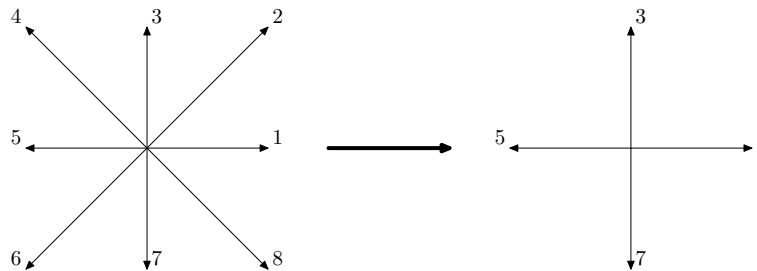


FIGURE 1 – L'éclatement  $Y_4 \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$

On choisit le relevé du point  $Q = [1 : 1] \times [1 : 1]$  de l'orbite ouverte que l'on va approcher. Comme conjecturé par D. McKinnon (Conjecture 2.6 *infra*), les courbes rationnelles donnent les meilleurs approximations. En effet, nous démontrons qu'il existe 4 courbes rationnelles  $Z_i$  ( $1 \leq i \leq 4$ ) passant par  $Q$  de degré anticanonique minimal qui donnent des meilleures approximations. Alors qu'en dehors des  $Z_i$ , les approximations optimaux sont peu nombreux et se situent sur une famille de courbes nodales en  $Q$  de degré bas dont la réunion est dense dans  $Y_4$ . Elles sont obtenues en considérant les courbes nodales dont les tangentes au point  $Q$  ont les pentes irrationnelles.

Autrement dit, les points au-dessus de la désingularisation en  $Q$  n'est pas définies sur  $\mathbb{Q}$  (en fait ils sont définis sur une extension quadratique de  $\mathbb{Q}$ ).

Avant d'esquisser la formulation de la distribution locale afin pour énoncer notre théorème principal, nous considérons d'abord un exemple particulier  $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^2$ . On fixe le point  $Q = [0 : 0 : 1]$  et la hauteur de Weil comme

$$H([x : y : z]) = \max(|x|, |y|, |z|), \quad \text{pgcd}(x, y, z) = 1.$$

On s'intéresse à l'ensemble des points rationnels de hauteur bornée

$$(\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^2)_{H \leq B} = \{P = [x : y : z] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{Q}) : H(P) \leq B\}.$$

Un calcul nous dit que les points le plus proches de  $Q$  sont à une distance de l'ordre de  $B^{-1}$ . Nous invitons les lecteurs à consulter [22, FIGURE 1] pour un dessin de la répartition des points de hauteur bornée autour de  $Q$ , où nous observons que les points se répartissent apparemment de préférence sur les droites rationnelles. L'idée est qu'après une manipulation de zoom, on peut définir une suite de mesures décrivant la distribution asymptotique des points proches de  $Q$ . Soit  $X$  une « bonne » variété munie d'une hauteur de Weil  $H$ . On fixe un point  $Q \in X(\bar{k})$  à approcher et un difféomorphisme local  $\rho$  de la variété en  $Q$  sur le plan tangent  $T_Q X$  qui envoie  $Q$  sur l'origine. Pour  $r > 0$  et  $B \gg 1$ , on définit la suite de mesures de Dirac par la formule suivante :

$$\delta_{U, Q, B, r} = \sum_{x \in U(k); H(x) \leq B} \delta_{B^{\frac{1}{r}} \rho(x)}. \quad (1.2)$$

En général on ne prend que les  $r$  tels que  $r \geq \alpha_{\text{ess}}$  parce que sinon on est ramené à des sous-variétés strictes (Proposition 2.8). On fixe une distance euclidienne  $d$  sur  $T_Q X_{\mathbb{R}}$  (qui est équivalente localement à toute distance projective définie sur  $X$ ). On note  $\mathbb{B}(0, \varepsilon)$  la boule centrée en l'origine de rayon  $\varepsilon > 0$  et  $\chi(\varepsilon)$  la fonction caractéristique associée. S'il existe  $\gamma \geq 0, \beta \geq 0$  tels que

$$B^{\gamma} (\log B)^{\beta} \ll_{\varepsilon} \int \chi(\varepsilon) d\delta_{U, Q, B, r} \ll_{\varepsilon} B^{\gamma} (\log B)^{\beta}, \quad (1.3)$$

pour une infinité de  $B \rightarrow \infty$ , ils décrivent la grandeur d'accumulation des points rationnels autour de  $Q$ . On renormalise en considérant la suite de mesures

$$\left\{ \frac{1}{B^{\gamma} (\log B)^{\beta}} \delta_{U, Q, B, r} \right\} \quad (1.4)$$

Si elles convergent (au sens faible) vers une mesure non-nulle, on l'appellera *la mesure limite*. Le phénomène général serait que quand  $r > \alpha_{\text{ess}}$ , (le zoom est *sous-critique*, Définition 2.9),  $\delta_{Q, U, B, r}(f)$  aurait l'ordre de grandeur attendu et la répartition des points rationnels serait plus uniforme. Le cas où  $r = \alpha_{\text{ess}}$  (le zoom est *critique*) est particulièrement intéressant. S. Pagelot a étudié dans [20] la distribution locale d'un  $\mathbb{Q}$ -point sur la droite projective et sur des surfaces de del Pezzo (toriques) de degré  $\geq 7$ . En particulier pour  $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^2$  il a affirmé (pour le zoom critique) l'existence de la mesure limite attendue de masse concentrée sur les droites (ceci est redémontré dans [14]). Il est naturel de se poser la même question pour les points algébriques et pour les variétés de dimension supérieure. L'auteur a étudié dans [14] ce problème pour une surface de del Pezzo torique de degré 6 et il a obtenu pour le cas  $r = \alpha_{\text{ess}}$  une mesure limite.

**Notation 1.1.** On note  $\mathcal{C}_Q^b(X)$  l'espace vectoriel des fonctions continues de support compact définie sur  $T_X Q$  à valeurs réelles.

On énonce le théorème principal du texte.

**Théorème 1.2** (cf. Théorèmes 5.5, 5.6, 5.7 *infra*). *On a  $\alpha(Q, Y_4) = \alpha_{\text{ess}}(Q, Y_4) = 2$ . Soit  $U = Y_4 \setminus \cup_{i=1}^4 Z_i$ . Soit  $r$  le facteur de zoom. Alors*

1. *Si  $r = 2$ , on a que pour toute  $f \in \mathcal{C}_Q^b(X)$ ,*

$$\delta_{U, Q, B, r}(f) = O_{\|f\|_{\infty}}(1).$$

*Il n'existe pas de mesure limite dans ce cas.*

2. *Si  $2 < r < \frac{144}{55}$ , alors il existe une constante  $\eta \in ]0, 1[$  telle que pour toute positive  $f \in \mathcal{C}_Q^b(X)$ ,*

$$\delta_{U, Q, B, r}(f) \gg \left( \int f d\delta_r \right) B^{(1+\eta)(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})} (\log B)^3 \quad (1.5)$$

*où  $\delta_r$  est une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue planaire.*

En combinant avec le résultat de Pagelot (Théorème A.1), on trouve que  $\delta_{U,Q,B,2}(f) = o(\delta_{Z_i,Q,B,2}(f))$  pour toute positive  $f$ . Ceci implique le nombre d'approximants sur les  $Z_i$  domine celui dans le complémentaire bien que leur constantes d'approximation coïncident. Remarquons que d'après l'heuristique naïve du principe de Batyrev-Manin (cf. (5.8)), on souhaiterait que la puissance de  $B$  soit  $2 - \frac{1}{r}$ . C'est-à-dire que l'on voudrait pouvoir prendre  $\eta = 1$ . Nous démontrons tous les  $\eta$  suffisamment petit nous permettent de garantir la minoration (1.5) (cf. Théorème 5.7). L'observation cruciale dans la démonstration de ce résultat est que les meilleures approximations dans  $U$  sont obtenues sur certaines courbes rationnelles qui sont nodales en  $Q$ . Quand on restreint à ces courbes nodales, l'approximation du point  $Q$  revient à l'approximation d'un point *algébrique quadratique*, ce qui nous amène à étudier plus soigneusement la distribution locale des points algébriques sur la droite projective. Notons qu'en dimension 1, il n'y a pas de sous-variétés localement accumulatrices.

**Théorème 1.3** (cf. Théorèmes 4.1, 4.8 *infra*). *On munit le fibré  $\mathcal{O}(1)$  sur  $\mathbb{P}^1$  une hauteur de Weil (cf. (4.1)). Soit  $\theta$  un nombre irrationnel algébrique. On identifie  $\theta$  comme un point rationnel  $[\theta : 1]$  de  $\mathbb{P}^1$ . Alors  $\alpha(\theta, \mathbb{P}^1) = \frac{1}{2}$ .*

— Si  $r = \frac{1}{2}$  et  $\theta$  est un nombre quadratique, alors pour toute fonction  $f \in \mathcal{C}_\theta^b(\mathbb{P}^1)$ ,

$$\delta_{\mathbb{P}^1, \theta, B, \frac{1}{2}}(f) = O_{\theta, \|f\|_\infty}(1)$$

et il existe certaines fonctions  $g \in \mathcal{C}_\theta^b(\mathbb{P}^1)$  telles que

$$\liminf_B \delta_{\mathbb{P}^1, \theta, B, \frac{1}{2}}(g) < \limsup_B \delta_{\mathbb{P}^1, \theta, B, \frac{1}{2}}(g).$$

En d'autres termes, il n'existe pas de mesure limite pour le zoom critique.

— Si  $r > \frac{1}{2}$ . Alors pour toute  $f \in \mathcal{C}_\theta^b(\mathbb{P}^1)$ ,

$$\delta_{\mathbb{P}^1, \theta, B, r}(f) = B^{2-\frac{1}{r}} \left( \frac{3}{\pi^2 \sup(1, |\theta|)^2} \int f(x) dx + o(1) \right).$$

En particulier, la mesure limite est proportionnelle à la mesure de Lebesgue.

La constante d'approximation de  $\theta$  est déduite des théorèmes de Dirichlet et Roth (ou de l'inégalité de Liouville). Pour les nombres quadratiques, le zoom critique est directement lié aux équations de Pell-Fermat. Trouver des points dans le zoom équivaut plus ou moins à trouver des solutions *primitives* (Définition 3.6) de ces équations. La théorie algébrique des nombres pour les corps  $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$  où  $D$  est un entier naturel sans facteur carré nous donne une bonne compréhension de la structure des solutions des équations  $x^2 - Dy^2 = m$  pour  $m \in \mathbb{Z}$ . Pour les équations de la forme  $ax^2 - by^2 = c$ , grâce à la résolubilité de l'équation  $ax^2 - by^2 = a$  on peut toujours localiser certaines solutions, qui suffisent pour l'utilisation que nous en faisons. On remarque aussi que la constante implicite dans le premier énoncé est explicitement calculable. Voir les détails et les énoncés précis dans la section 3.

Le deuxième énoncé nous dit qu'il existe beaucoup d'approximants ayant la constante d'approximation proche de  $\frac{1}{2}$ . Mais il semble difficile de construire des suites de points rationnels ayant cette propriété même pour un seul nombre cubique (voir [10]). En fait dans la démonstration, on utilise le théorème de Roth sous la forme « ineffective » : pour tout  $\lambda > 0$ , il existe une constante  $C = C(\theta, \lambda) > 0$  telle que pour tout rationnel  $\frac{u}{v}$ , on ait

$$\left| \frac{u}{v} - \theta \right| > \frac{C}{v^{2+\lambda}}.$$

Mais la constante  $C$  n'est pas explicite. En terme de l'expansion en fraction continue, on ne sait pas comment contrôler la croissance des quotients partiels sauf pour les nombres quadratiques. La conséquence est l'ineffectivité du terme d'erreur. La difficulté majeure de comptage est que (quand on prend une fonction caractéristique d'un intervalle par exemple) les points que l'on veut dénombrer sont des points entiers primitifs dans une région très fine. La formule empirique (le terme principal est le volume et le terme d'erreur est de grandeur de la longueur du bord) n'est plus applicable. L'idée que l'on va adapter est la théorie d'équirépartition modulo 1. Nous allons démontrer cet énoncé pour des nombres réels ayant la mesure d'irrationalité 2 (Définition 4.6), et pour certains nombres quadratiques particulier avec la constante implicite précisée (cf. la section 4).

La démonstration du théorème 1.2 utilise le paramétrage par des courbes nodales. La première partie se déduit de celle du théorème 1.3 en remarquant que dans un voisinage fixé du point  $Q$ , il n'y a qu'un nombre fini de courbes nodales qui interviennent pour le zoom critique. Pour le zoom sous-critique, sur certaines courbes nodales on trouve une équidistribution au sens du deuxième énoncé du Théorème 1.3 (cf. Proposition 5.8 *infra*). Chacune de ces courbes donne des points d'ordre de grandeur égale à une puissance de  $B$ . Le problème est de les sommer. Pour cela on utilise la technique développée par R. de la Bretèche et T. D. Browning dans [7], [8], [5] pour traiter l'ordre moyen des diviseurs pour des forme binaires, qui nous entraîne une formule asymptotique

pour le dénombrement de points sur les courbes dont le paramètre est petit. La mesure  $\delta_r$  qui minore le zoom peut être vue comme une saturation de ces courbes nodales, chacune étant équipée d’une mesure uniforme. Ceci est analogue à l’exemple de la surface del Pezzo torique de degré 6 étudiée dans [14], où la mesure limite existe pour le zoom critique, qui est obtenue en utilisant le paramétrage par des droites. Avec les techniques utilisées dans ce texte, on n’est pas capable de trouver une formule asymptotique pour le zoom sous-critique de la surface  $Y_4$  (c’est-à-dire “ $\gg$ ” remplacé par “ $\sim$ ”). Toutefois le deuxième énoncé assure que l’ordre de croissance de la distribution locale est minoré par une puissance positive de  $B$  avec une mesure uniforme.

Esquissons l’organisation du texte. Dans la section 2 on introduit la notion de constante d’approximation et l’on précise l’opération de zoom. La section 3 est consacrée aux propriétés fondamentales des corps quadratiques réels et l’application aux équations de Pell-Fermat. En les utilisant, on démontre le théorème 1.3 en étudiant la distribution locale critique des nombres algébrique quadratiques dans la première partie de la section 4, et dans la deuxième partie on démontre la formule asymptotique pour le zoom sous-critique de certains nombres réels basé sur les théorèmes classiques sur l’équirépartition modulo 1. L’étude de la distribution locale de la surface torique  $Y_4$  (à tout niveau) est faite dans la dernière section 5, où démontrons-nous le théorème 1.2. Nous référons le lecteur aux appendices pour une présentation du résultat de S. Pagelot et celui de R. de la Bretèche et T. D. Browning.

**Notations :** On note  $\varphi$  la fonction indicatrice d’Euler,  $\tau$  le fonction arithmétique donnant le nombre total de diviseurs donnée par :

$$\tau(n) = \sum_{d|n} 1, \quad \text{pour } n \geq 1, \quad (1.6)$$

et  $\mu$  la fonction de Möbius. On définit, pour  $n \geq 1$ ,

$$\phi(n) = \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right), \quad (1.7)$$

alors on a

$$\varphi(n) = n\phi(n).$$

Pour un nombre réel  $x$ , on note  $[x]$  la *partie entière* de  $x$  qui est le plus grand entier  $\leq x$ , et  $\{x\} = x - [x] \in [0, 1[$  la *partie fractionnaire* de  $x$ . Fixons  $E$  un ensemble. Pour  $A, B \subseteq E$ , on note  $A \Delta B$  le sous-ensemble de  $E$  défini par

$$A \Delta B = A \setminus B \cup B \setminus A = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y). \quad (1.8)$$

Pour  $F$  un sous-ensemble de  $\mathbb{Z}^2$ , on note

$$F_{\text{prem}} = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2 : \text{pgcd}(x_1, x_2) = 1\}$$

l’ensemble des points primitifs de  $F$ .

## 2 Constantes d’approximation

### 2.1 Constante d’approximation et constante essentielle

On définit plusieurs *constantes d’approximation* d’un point rationnel sur une variété algébrique généralisant la notion de *mesure d’irrationalité* venant de l’approximation diophantienne classique. Dans cet article, nous considérons uniquement les distances archémediennes réelles. Une définition analogue pourrait s’appliquer aux places non-archémediennes. Soit  $X$  une variété projective définie sur un corps de nombres  $k$  et équipée d’une distance projective  $d$  (cf. [19] §2). Soit  $L$  un fibré en droites sur  $X$  muni d’une hauteur de Weil absolue  $H_L$ . On fixe un point rationnel  $Q \in X(\bar{k})$ . Pour  $V$  une partie constructible de  $X$ , on considère les ensembles

$$A(Q, V) = \{\gamma > 0 | \exists (y_i) \in V(k)^{\mathbb{N}}, \exists C > 0, d(Q, y_i) \rightarrow 0 \text{ et } d(Q, y_i)^\gamma H_L(y_i) < C\},$$

$$B(Q, V) = \{\gamma > 0 | \exists C > 0, d(Q, y)^\gamma H_L(y) \geq C, \forall y \in V(k) \text{ et } y \neq Q\}.$$

Chacun est un intervalle : si  $\gamma_0 \in B(Q, V)$ , tout  $0 < \gamma < \gamma_0$  appartient à  $B(Q, V)$  ; de même, si  $\gamma_0 \in A(Q, V)$ , tout  $\gamma > \gamma_0$  appartient à  $A(Q, V)$ .

**Définition 2.1.** Soit  $U$  un ouvert de  $X$ . On dit que  $L$  vérifie la *propriété de Northcott* pour  $U$  si pour tout  $B > 0$ ,

$$\#\{x \in U(k) : H_L(x) \leq B\} < \infty.$$

**Proposition-Définition 2.2** ([19], Proposition 2.11). Soient  $Q \in X(\bar{k})$  et  $V$  une partie constructible de  $X$ . Supposons que  $L$  vérifie la propriété de Northcott pour un ouvert de Zariski non-vide  $U$  contenant  $Q$ . Alors on a

$$\inf A(Q, U \cap V) = \sup B(Q, U \cap V).$$

Cette quantité est appelée *constante d'approximation en  $Q$  dans  $V$* , notée  $\alpha_L(Q, V) = \alpha(Q, V)$  s'il le fibré  $L$  est fixé dans la considération. S'il existe une sous-variété fermée  $Z$  contenue dans  $V$  tel que  $\alpha(Q, Z) = \alpha(Q, V)$ , on dit que  $\alpha(Q, V)$  peut être calculée sur  $Z$ .

Cette définition ne dépend pas du choix de  $U$ . Dans la suite, lorsque l'on parle de la constante d'approximation, on admet que  $L$  vérifie la propriété de Northcott pour un ouvert dense contenant  $Q$ .

**Définition 2.3** ([20]). On définit *constante essentielle* en  $Q$  comme la quantité

$$\alpha_{\text{ess}L}(Q) = \alpha_{\text{ess}}(Q) = \sup_V \alpha(Q, V) \quad (2.1)$$

où  $V$  parcourt tous les ouverts denses de  $X$ . S'il existe une sous-variété  $Z$  de  $X$  de sorte que pour tout ouvert dense  $W \subset Z$ ,  $\alpha(Q, W) < \alpha_{\text{ess}}(Q)$ , on dit que  $Z$  est *localement accumulatrice*.

Ces notions ne dépendent ni du choix de la hauteur associée à fibré  $L$ , ni du choix de la distance projective.

Puisque le problème que l'on étudiera est local et que le point que l'on va approcher est dans l'orbite ouverte, on peut se restreindre à des ouverts de  $X$ . Dans la suite on suppose que le fibré en droites  $L$  est gros, c'est-à-dire sa classe est dans l'intérieur du cône pseudoeffectif de  $X$ . Alors il existe un entier  $m$  tel que l'application rationnelle  $\Upsilon_m : X \dashrightarrow \mathbb{P}(H^0(X, L^{\otimes m}))$  est birationnelle vers son image. En particulier on peut choisir un ouvert  $U$  tel que  $U \simeq \Upsilon_m(U) \subset \mathbb{P}(H^0(X, L^{\otimes m}))$  et donc

$$\#\{x \in U(k) : H_L(x) \leq B\} = \#\{y \in \Upsilon_m(U)(k) : H_{\mathcal{O}(1)}(y) \leq B\} < \infty$$

grâce au théorème de Northcott. Dans ce qui va suivre, on suppose toujours que  $L$  vérifie cette propriété, ce qui est le cas pour le fibré anticanonique des variétés toriques complètes lisses (parce que le polytope associé à  $-K_X$  est le reflété de l'éventail de  $X$  contenant l'origine, cf. [12] §3.4 p. 66). En outre le fibré  $-K_X$  est sans lieu de base sur l'orbite ouverte et donc la propriété de Northcott est vérifiée.

Toutes ces constantes sont connues en dimension 1.

**Théorème 2.4** (Théorème de Roth, Principe de Dirichlet, [19] Lemma 2.16). Soient  $x \in \mathbb{P}^1(\bar{\mathbb{Q}})$  et  $d \in \mathbb{N}$ . On fixe une hauteur de Weil absolue associée à  $\mathcal{O}(d)$ . Alors

$$\alpha(x, \mathbb{P}^1) = \begin{cases} d & \text{si } x \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}); \\ \frac{d}{2} & \text{si } x \text{ est irrationnel.} \end{cases} \quad (2.2)$$

**Remarque 2.5** ([19] Theorem 2.16). La constante d'approximation est sensible aux singularités. Prenons une courbe rationnelle  $C$  définie sur  $k$  et  $L$  un faisceau inversible ample sur  $C$ . On fixe  $Q \in C(\bar{k})$ . Soit  $\phi : C' \rightarrow C$  le morphisme de normalisation. Alors

$$\alpha(Q, C) = \min_{P \in \phi^{-1}(Q)} \frac{d}{m_P r_P},$$

où  $d = \deg_C(L)$ ,  $m_P$  est la multiplicité de la branche de  $C$  passant par  $Q$  correspondant à  $P$  et

$$r(P) = \begin{cases} 0 & \text{si } k(P) \not\subset k_\infty; \\ 1 & \text{si } k(P) = k; \\ 2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ici  $r_P = 0$  veut dire que  $\frac{d}{m_P r_P} = \infty$ , qui arrive par exemple pour  $k = \mathbb{Q}$  et  $Q$  un point imaginaire  $k(Q) \not\subset \mathbb{R} = \mathbb{Q}_\infty$  et donc il est impossible d'être approché par des nombres rationnels. Nous ne considérons pas ce cas dans ce texte.

C'est un fait empirique que les approximants proviennent essentiellement des courbes rationnelles. En effet D. McKinnon a proposé la conjecture suivante [18, Conjecture 2.7] :

**Conjecture 2.6** (McKinnon). Soient  $L$  un fibré ample sur  $X$  avec une hauteur de Weil choisie et  $Q \in X(k)$ . Supposons qu'il y a une courbe rationnelle passant par  $Q$  (ceci implique en particulier que  $\alpha(Q, X) < \infty$ ). Alors il existe une courbe rationnelle  $C$  telle que

$$\alpha(Q, C) = \alpha(Q, X).$$

Cette conjecture prédit que  $\alpha(Q, X)$  peut être calculée sur des courbes rationnelles passant par  $Q$ , qui est accord avec notre cas.

On utilise souvent la procédure suivante pour déterminer la constante essentielle. Elle consiste essentiellement en deux étapes : démontrer une borne inférieure uniforme valide dans un ouvert pour le produit d'une certaine puissance de la distance avec la hauteur et trouver une famille de courbes rationnelles dont la réunion dans la variété est dense pour la topologie de Zariski et chacune atteint la constante d'approximation souhaitée. Il convient de remarquer que cette procédure donne seulement une condition « suffisante » pour trouver  $\alpha_{\text{ess}}$ . En général il n'est pas clair que  $\alpha_{\text{ess}}$  puisse toujours être atteinte sur une famille de courbes rationnelles.

## 2.2 Opération de zoom

Maintenant nous allons décrire l'opération de zoom en détail. On identifie localement  $X(\mathbb{R})$  avec l'espace tangent  $T_Q X$  en envoyant  $Q$  sur l'origine, en utilisant un système de coordonnées analytiques. Dans  $T_Q X$ , on définit une « contraction » par une homothétie de rapport une puissance de  $B$  (la lettre  $B$  désigne ici la borne de la hauteur). Plus précisément, si l'on note le difféomorphisme entre  $X(\mathbb{R})$  et  $T_Q X$  par  $\rho$ , alors l'opérateur de zoom  $\Psi_{r,B}$  avec le facteur  $r$  est défini par

$$\Psi_{r,B}(P) = B^{\frac{1}{r}} \rho(P), \quad P \in X(\mathbb{R}).$$

Fixons  $U$  une sous-variété de  $X$ . Rappelons la notation  $\mathcal{C}_Q^b(X)$  (Notation 1.1). Soit  $f \in \mathcal{C}_Q^b(X)$ , on introduit la mesure  $\delta_{U,Q,B,r}$  (1.2) définie par

$$\int f \, d\delta_{U,Q,B,r} = \sum_{x \in U(k): H_L(x) \leq B} f(B^{\frac{1}{r}} \rho(x)).$$

Cette définition dépend de la différentielle en l'origine du difféomorphisme choisi. Supposons qu'il existe  $\beta \geq 0, \gamma \geq 0$  tels que (1.3) soit vérifiée pour une infinité de  $B$ . On peut donner, à l'aide de la conjecture de Batyrev-Manin et celle de Peyre sur l'équidistribution des points rationnels, une prédiction naïve de cet ordre de grandeur. Soit  $n = \dim X$ . Quand on calcule  $\{\int \chi(\varepsilon) \, d\delta_{U,Q,B,r}\}$ , on est en train de compter des points rationnels dans la boule  $\mathbb{B}(0, B^{-\frac{1}{r}} \varepsilon)$  dont le volume est de grandeur  $B^{-\frac{n}{r}}$ . Supposons la validité de la conjecture de Batyrev-Manin pour l'ouvert  $U$ , c'est-à-dire (on note  $k = \text{rg}(\text{Pic}(X))$ )

$$\#\varrho^{-1}(\mathbb{B}(0, \varepsilon))_{H \leq B} \gg_{\ll \varepsilon} B(\log B)^{k-1},$$

et la validité d'une forme forte de l'équidistribution, c'est-à-dire pour des voisinages analytiques dont la taille dépendent de  $B$ , alors on devrait avoir dans (1.3),

$$\int \chi(\varepsilon) \, d\delta_{U,Q,B,r} \gg_{\ll \varepsilon} B^{-\frac{n}{r}} \times B(\log B)^{k-1} = B^{1-\frac{n}{r}} (\log B)^{k-1}.$$

Autrement dit on devrait avoir

$$\beta = 1 - \frac{n}{r}, \quad \gamma = k - 1. \quad (2.3)$$

En fait, dans tous les (rares) exemples connus, la valeur de  $\beta$  est accord avec cette prédiction, mais celle de  $\gamma$  ne l'est pas. Il arrive parfois que  $\beta = \gamma = 0$ , comme pour la variété considérée dans ce texte. Le comportement de la suite (1.4) décrit la *distribution locale* autour du point  $Q$  sur  $X$ . On appelle *mesure limite* comme la limite de la suite (1.4) (si elle existe). Prenant du recul, une minoration du type

$$\frac{1}{B^\beta (\log B)^\gamma} \int \chi(\varepsilon) \, d\delta_{U,Q,B,r} \gg \int \chi(\varepsilon) \, d\tilde{\delta}_r, \quad \forall \varepsilon > 0$$

pour une mesure  $\tilde{\delta}_r$  définie sur  $T_Q X$  veut dire que la distribution locale est uniformément minorée par une mesure, ce qui assure l'existence de « beaucoup » de points dans le zoom. C'est ce que nous allons démontrer pour certains zooms de la surface  $Y_4$ .

Inspiré par le fait que certaines courbes rationnelles contiennent beaucoup plus de points que les autres dans une même variété dans l'opération de zoom, bien qu'elles aient la même constante d'approximation, nous proposons la définition suivante pour les distinguer.

**Définition 2.7.** Supposons que  $\alpha_{\text{ess}}(Q) < \infty$ . On dit qu'une sous-variété fermée stricte  $W$  de  $X$  est *localement faiblement accumulatrice* si  $\alpha_{\text{ess}}(Q) = \alpha(Q, W)$  et pour tout  $\varepsilon > 0$  suffisamment grand, pour tout ouvert  $U$  dense pour la topologie de Zariski satisfaisant à  $\alpha(Q, U) = \alpha_{\text{ess}}(Q)$  et  $U \cap W$  dense dans  $W$ ,

$$\int \chi(\varepsilon) \, d\delta_{U \setminus W, Q, B, \alpha_{\text{ess}}(Q)} = o \left( \int \chi(\varepsilon) \, d\delta_{U \cap W, Q, B, \alpha_{\text{ess}}(Q)} \right).$$

Autrement dit, les sous-variétés localement faiblement accumulatrices ne sont pas localement accumulatrices mais dominant leur complément dans le zoom critique.

Le zoom d'un certain facteur va mettre en évidence les sous-variétés dont la constante d'approximation atteignent ce facteur et ignorer ceux dont la constante d'approximation est plus grande. Donc le zoom d'un facteur plus petit que  $\alpha_{\text{ess}}$  va nous ramener à des sous-variétés fermées localement accumulatrices. Cela plus la proposition suivante explique la raison pour laquelle on s'intéresse au zoom avec le facteur  $\geq \alpha_{\text{ess}}$ .

**Proposition 2.8.** *Soit  $U$  une partie analytique de  $X$  pour laquelle  $L$  vérifie la propriété de Northcott telle que  $\alpha(Q, U) = \alpha_{\text{ess}}(Q)$ . Alors pour tout  $r < \alpha_{\text{ess}}$  et  $f \in \mathcal{C}_Q^b(X)$ , on a*

1.  $\int f d\delta_{U, Q, B, r} = f(Q)$  si  $Q \in U(\bar{k})$  ;
2.  $\int f d\delta_{U, Q, B, r} = 0$  sinon,

pour  $B \gg_{f, r} 1$ .

*Démonstration.* On peut supposer que  $f$  est une fonction caractéristique  $\chi(\varepsilon)$  pour  $\varepsilon > 0$ . On choisit une distance  $d$  sur  $T_Q X$ . D'après la Proposition-définition 2.2, pour  $\beta > 0$  tel que  $r + \beta < \alpha_{\text{ess}}$ , il existe une  $C > 0$  telle que pour tout  $P \in U(k)$  différent de  $Q$ ,  $d(\varrho(P), \varrho(Q))^{r+\beta} H_L(P) \geq C$ . Supposons que  $H(P) \leq B$ . Cela implique que

$$d(\varrho(P), \varrho(Q)) \geq C^{\frac{1}{r+\beta}} H_L(P)^{-\frac{1}{r+\beta}} \geq C' B^{-\frac{1}{r+\beta}}.$$

Les points après zoom doivent situer dans le support de  $f$ , donc  $d(\varrho(P), \varrho(Q)) B^{\frac{1}{r}} \leq \varepsilon$ , d'où  $d(\varrho(P), \varrho(Q)) \leq \varepsilon B^{-\frac{1}{r}}$ . Donc un tel  $P$  n'existe pas quand  $B > (\varepsilon(C')^{-1})^{\frac{r(r+\beta)}{\beta}}$ .  $\square$

**Définition 2.9.** On dit que le zoom est *critique* (resp. *sous-critique*) si son facteur  $r = \alpha_{\text{ess}}$  (resp.  $> \alpha_{\text{ess}}$ ).

Dans cet article on s'intéresse aux variétés toriques lisses et projectives dont le fibré en droites anticanonique est engendré par ses sections globales et on utilise une hauteur de Weil associée. Les travaux [3] [4] [23] confirment la conjecture de Manin pour les variétés toriques munies d'une hauteur de Weil associée au fibré anticanonique. Ceci est en faveur de la prédiction précédente sur l'ordre de grandeur (2.3) (au moins pour  $\beta$ ).

## 3 Solutions des équations de Pell-Fermat

### 3.1 Rappels sur la théorie algébrique des corps de nombres quadratiques

On rappelle des faits classiques sur les corps quadratiques réels. Pour les détails, voir par exemple ([24] 2.5, 4.6, 5.4). On fixe un entier  $D > 0$  sans facteur carré. Soit  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ . On note  $\varepsilon_D$  l'unité fondamentale de  $\mathcal{O}_K$  telle que  $\varepsilon_D > 1$ . Alors le groupe d'unités  $\mathcal{O}_K^* = \{\pm 1\} \oplus \{\varepsilon_D^n, n \in \mathbb{Z}\}$ . On introduit les sous-groupes de  $\mathcal{O}_K^*$  :

$$\mathcal{U}_D^+ = \{z \in \mathcal{O}_K : N(z) = 1\}, \quad (3.1)$$

$$\mathcal{U}_D^* = \{z \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{D} : N(z) = 1\}. \quad (3.2)$$

On note  $\varepsilon_D^+ > 1$  (resp.  $\varepsilon_D^* > 1$ ) l'élément de  $\mathcal{U}_D^+$  (resp.  $\mathcal{U}_D^*$ ) dont la classe engendre le groupe  $\mathcal{U}_D^+/\{\pm 1\}$  (resp.  $\mathcal{U}_D^*/\{\pm 1\}$ ).

**Lemme 3.1** ([24], p. 78).

$$\varepsilon_D^* = \begin{cases} \varepsilon_D^+ & \text{si } \varepsilon_D \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{D}; \\ (\varepsilon_D^+)^3 & \text{si } \varepsilon_D \notin \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{D}. \end{cases} \quad (3.3)$$

Pour  $m \in \mathbb{Z}$ , on désigne par  $S_{D, m}^*$  l'ensemble des solutions entières de l'équation Pell-Fermat

$$x^2 - Dy^2 = m. \quad (3.4)$$

$$S_{D, m}^* = \{z = x + y\sqrt{D} \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{D} : N(z) = m\}.$$

On note aussi

$$S_{D, m} = \{z \in \mathcal{O}_K : N(z) = m\}.$$



La notation  $I \triangleleft A$  signifie ici que  $I$  est un idéal de l'anneau  $A$ . On utilise  $N_{K/\mathbb{Q}}(\cdot)$  pour désigner la norme des idéaux et  $N(\cdot)$  pour désigner la norme des éléments. On définit

$$\mathcal{I}_{|m|} = \{I \triangleleft \mathcal{O}_K : N_{K/\mathbb{Q}}(I) = |m|\}, \quad \mathcal{I}_m^* = \{I \triangleleft \mathcal{O}_K : \exists a_I \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{D}, N(a_I) = m, I = (a_I)\}.$$

On note In (resp. De, Ra) l'ensemble des nombres premiers qui sont inertes (resp. sont décomposés, se ramifient) dans l'extension  $\mathbb{Q}(\sqrt{D})/\mathbb{Q}$ . Pour tout  $z = x + y\sqrt{D} \in K$ , sa conjugaison est définie par

$$\bar{z} = x - y\sqrt{D}.$$

On a besoin d'une estimation explicite du cardinal de l'ensemble  $\mathcal{I}_{|m|}$  ainsi que celui de  $\mathcal{I}_m^*$ .

**Proposition 3.2.** *On fixe  $m \in \mathbb{Z}$ . Soient les entiers  $m_1, m_2 > 0$  définis par la factorisation*

$$|m| = \prod_{p \text{ premier}} p^{v_p(m)} = \prod_{\substack{p \in \text{De} \\ p|m}} p^{v_p(m)} \cdot \prod_{\substack{p \notin \text{De} \\ p|m}} p^{v_p(m)} = m_1 \cdot m_2. \quad (3.5)$$

Alors on a

$$\#\mathcal{I}_{|m|} = \begin{cases} 0 & \text{s'il existe } p \in \text{In}, p|m \text{ et } v_p(m) \text{ impair;} \\ \prod_{\substack{p \in \text{De} \\ p|m}} (v_p(m) + 1) = \tau(m_1) & \text{sinon;} \end{cases}$$

où  $\tau$  désigne la fonction arithmétique de nombre du diviseur (cf. (1.6)).

On observe que l'ensemble  $\mathcal{I}_{|m|}$  est parfois vide.

**Corollaire 3.3.**

$$\#\mathcal{I}_{|m|} \leq \tau(m_1) \leq \tau(|m|).$$

*Démonstration de la proposition.* Quelque soit  $I \in \mathcal{I}_{|m|}$ , on considère sa décomposition

$$I = \prod_{\mathfrak{p} \text{ premier} \triangleleft \mathcal{O}_K} \mathfrak{p}^{e_{\mathfrak{p}}}.$$

Alors comme l'application  $N_{K/\mathbb{Q}}(\cdot)$  est multiplicative,

$$|m| = N_{K/\mathbb{Q}}(I) = \prod_{\mathfrak{p} \text{ premier} \triangleleft \mathcal{O}_K} N_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{p})^{e_{\mathfrak{p}}} = \prod_{\substack{p \in \text{De} \\ p\mathcal{O}_K = \mathfrak{p}\bar{\mathfrak{p}}}} p^{e_{\mathfrak{p}} + e_{\bar{\mathfrak{p}}}} \prod_{\substack{p \in \text{In} \\ p\mathcal{O}_K = \mathfrak{p}}} p^{2e_{\mathfrak{p}}} \prod_{\substack{p \in \text{Ra} \\ p\mathcal{O}_K = \mathfrak{p}^2}} p^{e_{\mathfrak{p}}}.$$

La quantité à droite est en fait la factorisation de  $m$  (3.5). On en conclut que

$$v_p(m) = \begin{cases} e_{\bar{\mathfrak{p}}} + e_{\mathfrak{p}} & \text{si } p \in \text{De}; \\ e_{\mathfrak{p}} & \text{si } p \in \text{Ra}; \\ 2e_{\mathfrak{p}} & \text{si } p \in \text{In}. \end{cases}$$

En particulier  $v_p(m)$  est pair pour  $p \in \text{In}$ . Réciproquement, pour tout  $p \in \text{In}$ , on choisit  $m_p$  pair et pour tout  $p \in \text{De}$ , donnons-nous un couple  $(e_{\mathfrak{p}}^1, e_{\mathfrak{p}}^2) \in \mathbb{N}^2$  tel que  $e_{\mathfrak{p}}^1 + e_{\mathfrak{p}}^2 = m_p$ . Le produit

$$\prod_{\substack{p \in \text{De} \\ p\mathcal{O}_K = \mathfrak{p}\bar{\mathfrak{p}}}} \mathfrak{p}^{e_{\mathfrak{p}}^1} \bar{\mathfrak{p}}^{e_{\mathfrak{p}}^2} \prod_{\substack{p \in \text{In} \\ p\mathcal{O}_K = \mathfrak{p}}} \mathfrak{p}^{\frac{m_p}{2}} \prod_{\substack{p \in \text{Ra} \\ p\mathcal{O}_K = \mathfrak{p}^2}} \mathfrak{p}^{m_p}.$$

est un idéal de norme  $|m|$ . Pour chaque  $p \in \text{De}$ , il y a  $v_p(m) + 1$  tels couples d'entiers. D'où l'énoncé.  $\square$

**Lemme 3.4.** *Le groupe  $\mathcal{U}_D^+$  (3.2) agit sur  $S_{D,m}$  librement et l'ensemble des orbites est en bijection avec*

$$\mathcal{I}_m^+ = \{I \triangleleft \mathcal{O}_K : \exists a_I \in \mathcal{O}_K, N(a_I) = m, I = (a_I)\}.$$

**Proposition 3.5.** *Le groupe  $\mathcal{U}_D^*$  (3.1) agit sur l'ensemble  $S_{D,m}^*$  librement et on a la majoration suivante pour le cardinal de l'ensemble des orbites :*

$$\#(S_{D,m}^*/\mathcal{U}_D^*) \leq 3\#\mathcal{I}_m^+ \leq 3\#\mathcal{I}_{|m|} \leq 3\tau(m).$$

*Démonstration.* D'après le lemme 3.1 on a  $[\mathcal{U}_D^+ : \mathcal{U}_D^*] \leq 3$ . Le cardinal des orbites de l'action de  $\mathcal{U}_D^*$  sur  $S_{D,m}^*$ , qui est aussi libre, est majoré par

$$\sharp(S_{D,m}^*/\mathcal{U}_D^*) \leq \sharp(S_{D,m}/\mathcal{U}_D^*) \leq 3\sharp(S_{D,m}/\mathcal{U}_D^+) = 3\sharp\mathcal{I}_m^+ \leq 3\sharp\mathcal{I}_{|m|}.$$

La conclusion découle du corollaire 3.3. □

**Définition 3.6.** Une solution  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  de l'équation (3.4) est dite *primitive* si  $\text{pgcd}(x, y) = 1$ .

Toute solution de (3.4) vérifie  $\text{pgcd}(x, y)^2 \mid m$ . Donc lorsque  $\mu(m)^2 = 1$ , toutes les solutions sont automatiquement primitives. Un avantage de la décomposition de  $S_{D,m}^*$  par l'action de  $\mathcal{U}_D^*$  est le suivant.

**Lemme 3.7.** *Supposons que  $S_{D,m}^* \neq \emptyset$ . Alors  $\text{pgcd}(x, y)$  ne dépend pas des éléments  $x + y\sqrt{D} \in S_{D,m}^*$  qui sont dans une même orbite.*

*Démonstration.* Soient  $a, b \in S_{D,m}^*$  tels que  $b \in a\mathcal{U}_D^*$ . Alors  $(a) = (b)$  comme idéaux. Donc pour tout nombre premier  $p$ , on a

$$(a) \subset (p) \Leftrightarrow (b) \subset (p).$$

□

On appelle *famille de solutions* de (3.4) l'ensemble des solutions correspondant à une orbite de l'action de  $\mathcal{U}_D^*$  dans  $S_{D,m}^*$ . S'il existe une solution  $a = x + y\sqrt{D}$  qui est primitive, alors l'orbite par l'action de  $\mathcal{U}_D^*$  donne une famille de solutions primitives. Si la solution n'est pas primitive, on note  $p = \text{pgcd}(x, y)$  et on a  $p^2 \mid m$ . Alors  $\{z/p : z \in \mathcal{U}_D^* a\}$  est une famille de solutions *primitives* de l'équation

$$x^2 - Dy^2 = \frac{m}{p^2}$$

dont le coefficient est plus petit. Donc en l'identifiant avec une famille de solutions primitives dans  $S_{D,m/p^2}^*$ , on peut définir  $\mathcal{P}_D$  comme l'ensemble des familles des solutions primitives des équations (3.4) pour toutes les valeurs de  $m$ . Alors  $\sharp\mathcal{P}_D = \infty$  puisque tout couple  $(x_0, 1)$  engendre une famille de solutions primitives de (3.4) pour  $m$  arbitrairement grand. Cela est suffisant pour l'utilisation ultérieure, et l'on n'a pas besoin de décrire pour quels  $m$ , on a  $S_{D,m}^* \neq \emptyset$ .

## 3.2 Équations de Pell-Fermat généralisées

Maintenant on considère les équations diophantiennes

$$ax^2 - by^2 = c, \quad a, b \in \mathbb{N}, a < b, c \in \mathbb{Z}, \quad \text{pgcd}(a, b) = 1. \quad (3.6)$$

D'abord on démontre que les solutions de (3.6) sont contenues dans celles des équations de type  $x^2 - Dy^2 = m$ , dont la structure est connue d'après la discussion précédente. Deuxièmement on démontre que quand  $c = a$ , l'ensemble des solutions de l'équation (3.6) (modulo  $\{\pm 1\}$ ) est engendré par une puissance de l'unité fondamentale  $\varepsilon_D$ . Cela nous permet de construire une suite de solutions primitives de (3.6) à partir de n'importe quelle solution primitive de (3.6) pour  $c$  fixé. On factorise

$$a = A'(a')^2, \quad b = B'(b')^2, \quad (3.7)$$

avec  $A', B'$  sans facteur carré. Ce qui nous ramène aux équations considérées précédemment est l'observation simple suivante.

**Lemme 3.8.** *On note  $S_{a,b,c}^*$  l'ensemble des solutions  $(x, y)$  de (3.6). Alors  $S_{a,b,c}^* \subset S_{A'B',A'c}^*$ . Plus précisément, on a*

$$S_{a,b,c}^* = \{(x, y) \in S_{A'B',A'c}^* : A'a' \mid x, b'y \mid y\}.$$

*Démonstration.*

$$ax^2 - by^2 = c \iff (Aa'x)^2 - A'B'(b'y)^2 = Ac.$$

□

Maintenant comme toute solution  $(x, y)$  de l'équation

$$ax^2 - by^2 = a \quad (3.8)$$

vérifie  $a|y$ , en écrivant  $y = az, w = a'b'z$  et en utilisant les notations (3.7), on obtient l'équivalence suivante

$$\exists(x, y) \in \mathbb{Z}^2, ax^2 - by^2 = a \Leftrightarrow \exists(x, z) \in \mathbb{Z}^2, x^2 - abz^2 = 1 \Leftrightarrow \exists(x, w) \in \mathbb{Z} \times a'b'\mathbb{Z}, x^2 - A'B'w^2 = 1.$$

Notons qu'ici  $A'B'$  est un entier sans facteur carré. Ainsi chercher des solutions de (3.8) revient à résoudre une équation de Pell sous certaine condition de divisibilité, dont la résolubilité est assurée grâce à un théorème de Dirichlet. On donne une preuve courte pour faciliter la lecture.

**Théorème 3.9** (Dirichlet [11]). *Soit  $D$  un entier positif qui n'est pas un carré. On note*

$$D = ds^2, \quad d, s \in \mathbb{N}, d \text{ sans facteur carré.}$$

*Alors l'ensemble des solutions  $\mathcal{A}_D^*$  de l'équation*

$$x^2 - Dy^2 = 1$$

*est un sous-groupe de  $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{d})}^*$  vérifiant que  $\mathcal{A}_D^*/\{\pm 1\}$  est cyclique engendré par la classe d'une puissance de l'unité fondamentale  $\varepsilon_d$  du corps  $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ .*

*Démonstration.* L'ensemble

$$\mathcal{A}_D^* = \{z = u + v\sqrt{d} \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{d} : s|v, N_{\mathbb{Q}(\sqrt{d})/\mathbb{Q}}(z) = 1\} \quad (3.9)$$

est un sous-groupe (multiplicatif) de  $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{d})}^*$ . Puisque  $\mathcal{A}_D^*$  est le noyau du morphisme  $i \circ j$  dans le diagramme commutatif suivant,

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{A}_D^* & \longrightarrow & \mathcal{B}_D^* = \{z \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{d} : N_{\mathbb{Q}(\sqrt{d})/\mathbb{Q}}(z) = 1\} & & \\ \downarrow & & \downarrow j & \searrow i \circ j & \\ \ker(i) & \hookrightarrow & (\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{d})^* & \xrightarrow{i} & (\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{d}/(s))^*, \end{array}$$

qui part de l'ensemble  $\mathcal{B}_D^*$  de cardinal infini vers l'image  $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{d}/(s)$  de cardinal fini. Donc le noyau  $\mathcal{A}_D^*$  doit être un ensemble infini (même cyclique).  $\square$

**Proposition 3.10.** *Le groupe  $\mathcal{A}_{ab}^*$  (3.9) agit sur l'ensemble des solutions de (3.6) de la manière suivante. Pour  $u + v\sqrt{A'B'} \in \mathcal{A}_{ab}^*$ , et  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  une solution de (3.6), on note*

$$w = \frac{av}{a'b'} \in a\mathbb{Z}.$$

*Alors  $(x', y')$  défini par*

$$x' + \theta y' = (x + \theta y)(u + \theta w).$$

*est une solutions de (3.6). De plus,  $\text{pgcd}(x', y') = \text{pgcd}(x, y)$ .*

*Démonstration.* On vérifie que

$$au^2 - bw^2 = a \left( u^2 - \frac{abv^2}{(a')^2(b')^2} \right) = a(u^2 - A'B'v^2) = a.$$

Soit  $L = \mathbb{Q}(\theta)$ , alors

$$N_{L/\mathbb{Q}}(x' + \theta y') = (x')^2 - \frac{b}{a}(y')^2 = \left( x^2 - \frac{b}{a}y^2 \right) \left( u^2 - \frac{b}{a}w^2 \right) = \frac{c}{a},$$

d'où

$$a(x')^2 - b(y')^2 = c.$$

On a évidemment

$$\text{pgcd}(x, y) | \text{pgcd}(x', y').$$

Puisque (comme dans la démonstration du lemme 3.7)

$$x + \theta y = (x' + \theta y')(u - \theta w),$$

on en déduit que

$$\text{pgcd}(x', y') \mid \text{pgcd}(x, y),$$

d'où l'énoncé. □

**Remarque 3.11.** Soient

$$u_n + v_n \sqrt{A'B'} \in \mathbb{N} + \mathbb{N}\sqrt{A'B'}, \quad n \in \mathbb{N}$$

qui engendrent le groupe  $\mathcal{A}_{ab}^*/\{\pm 1\}$ . On fixe  $(x, y) \in \mathbb{N}^2$  une solution de (3.6) et soient  $(x_n, y_n)$  définis comme précédemment. Comme  $x_n, y_n \rightarrow \infty$ , on en conclut que les nombres rationnels  $(\frac{x_n}{y_n})$  forment une suite d'approximants de  $\sqrt{\frac{b}{a}}$ . Comme l'on a vu précédemment,

$$\#\{c \in \mathbb{Z} : \exists (x, y) \in \mathbb{Z}^2, \text{pgcd}(x, y) = 1, ax^2 - by^2 = c\} = \infty$$

puisque tout couple de types  $(1, v)$  ou  $(u, 1)$  appartiennent à cet ensemble. Ainsi on peut construire une infinité de suites de solutions primitives à l'aide de la procédure ci-dessus. Si  $(x, y)$  est primitif, on obtient alors une suite d'approximants *primitifs*.

## 4 Zoom sur les nombres algébriques

Dans cette section on étudie la distribution locale d'un point  $\theta \in \mathbb{P}^1(\bar{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R}) \setminus \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ . On identifie localement  $\mathbb{P}^1$  avec  $T_\theta \mathbb{P}^1$  via l'application définie pour  $v \neq 0$ ,

$$[u : v] \mapsto \frac{u}{v} \quad ([\theta : 1] \mapsto \theta).$$

On utilise la hauteur de Weil canonique associée à  $\mathcal{O}(1)$  :

$$H([u : v]) = \max(|u|, |v|), \quad (u, v) \in \mathbb{Z}^2, \quad \text{pgcd}(u, v) = 1. \quad (4.1)$$

On utilise la valeur absolue comme la distance. Il convient de choisir, pour tout  $\varepsilon > \eta > 0$ , les fonction caractéristiques  $\chi(\varepsilon)$  et  $\chi(\varepsilon, \eta)$  définies par

$$\chi(\varepsilon) = \chi(\{y \in \mathbb{R} : |y - \theta| \leq \varepsilon\}), \quad \chi(\varepsilon, \eta) = \chi(\{y \in \mathbb{R} : \eta < |y - \theta| \leq \varepsilon\})$$

pour tester la répartition asymptotique des rationnels autour du point  $\theta$ . On remarque que  $\chi(\varepsilon, \eta)$  est en fait la fonction caractéristique de la réunion des intervalles

$$] \theta + \eta, \theta + \varepsilon ], \quad [ \theta - \varepsilon, \theta - \eta [.$$

(Même pour  $\chi(\varepsilon)$ .) On fixe dans la suite  $B > 0, r > 1$  et l'on considère la suite de mesures  $\delta_{\mathbb{P}^1, \theta, B, r}$ .

### 4.1 Cas critique pour des nombres quadratiques

On voit que  $\delta_{\mathbb{P}^1, \theta, B, r}(\chi(\varepsilon))$  vaut le nombre de point  $[u : v] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$  qui vérifient les conditions suivantes

$$\left| \frac{u}{v} - \theta \right| \leq \varepsilon B^{-\frac{1}{r}}, \quad (4.2)$$

$$\text{pgcd}(u, v) = 1, \quad \max(|u|, |v|) \leq B \quad (4.3)$$

Si  $[\mathbb{Q}(\theta) : \mathbb{Q}] = 2$ , i.e.  $\theta$  est quadratique, un tel nombre est en général représenté de façon unique sous la forme

$$\theta = \frac{P}{Q} \pm \sqrt{\frac{b}{a}}, \quad \text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(P, Q) = 1.$$

En vertu de (4.2), il suffit de considérer les nombres de la forme  $\theta = \sqrt{\frac{b}{a}}$  avec  $\text{pgcd}(a, b) = 1$ . D'après les théorèmes de Roth et Dirichlet, on a  $\alpha_{\text{ess}}(\theta) = \alpha(\theta, \mathbb{P}^1) = \frac{1}{2}$ . Donc on prend  $r = \frac{1}{2}$  correspondant au zoom critique. On réécrit l'inéquation (4.2) comme

$$\left| \frac{u}{v} - \sqrt{\frac{b}{a}} \right| \leq \varepsilon B^{-2}. \quad (4.4)$$

On a aussi l'inégalité de Liouville

$$\left| \frac{u}{v} - \theta \right| \geq \frac{\Xi(\theta)}{v^2}, \quad (4.5)$$

où la constante  $\Xi(\theta) > 0$  est calculable (cf. la démonstration de la proposition 4.18). Le résultat principal de cette partie est le suivant, qui démontre la partie  $r = \frac{1}{2}$  du Théorème 1.3.

**Théorème 4.1.** *Pour  $C, D > 0$ , il existe  $\varepsilon > \eta > C$ ,  $\varepsilon - \eta < D$  tels que*

$$0 = \liminf_B \delta_{\mathbb{P}^1, \theta, B, \frac{1}{2}}(\chi(\varepsilon, \eta)) < \limsup_B \delta_{\mathbb{P}^1, \theta, B, \frac{1}{2}}(\chi(\varepsilon, \eta)) = O_{\varepsilon, \eta}(1).$$

*Par conséquent, il n'existe pas de mesure limite pour le zoom critique.*

Ce théorème est une conséquence des propositions 4.3, 4.4 et 4.5.

**Remarque 4.2.** Dans [17] S. Lang a considéré aussi le dénombrement d'approximants de nombres quadratiques mais sans l'opération de zoom (c'est-à-dire seulement la condition de borne de la hauteur est imposé). Il a obtenu une formule asymptotique du type  $c \log B$ , ce qui est une conséquence directe des conclusions sur la structure des solutions des équation de Pell-Fermat.

#### 4.1.1 Lien avec des équations de Pell-Fermat

Nous trouvons d'abord le lien avec des équations de Pell-Fermat. Les équations (4.4) et (4.3) nous donnent

$$\begin{aligned} |au^2 - bv^2| &= av^2 \left| \left( \frac{u}{v} + \sqrt{\frac{b}{a}} \right) \left( \frac{u}{v} - \sqrt{\frac{b}{a}} \right) \right| \\ &\leq av^2 \left( 2\sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{\varepsilon}{B^2} \right) \frac{\varepsilon}{B^2} \\ &\leq 2\varepsilon\sqrt{ab} + \frac{a\varepsilon^2}{B^2} = 2\varepsilon\sqrt{ab} + o(1). \end{aligned} \quad (4.6)$$

On en conclut que  $|au^2 - bv^2|$  ne prend qu'un nombre fini de valeurs entières et ce nombre est indépendant de  $B$ . Cela nous permet de décomposer la quantité  $\delta_{\mathbb{P}^1, \theta, B, \frac{1}{2}}(\chi(\varepsilon))$  de la façon suivante

$$\delta_{\mathbb{P}^1, \theta, B, \frac{1}{2}}(\chi(\varepsilon)) = \# \left( \bigsqcup_{|m| \leq 2\varepsilon\sqrt{ab}+1} E(\varepsilon, B)_m \right), \quad (4.7)$$

où

$$E(\varepsilon, B)_m = \left\{ (u, v) \in \mathbb{N}^2 \left| \begin{array}{l} \left| \frac{u}{v} - \sqrt{\frac{b}{a}} \right| \leq \varepsilon B^{-2}; \\ \text{pgcd}(u, v) = 1 \\ \max(|u|, |v|) \leq B; \\ au^2 - bv^2 = m. \end{array} \right. \right\}. \quad (4.8)$$

De plus, on a, d'après (4.5),

$$\frac{\varepsilon}{B^2} \geq \frac{\Xi(\theta)}{v^2} \geq \frac{\Xi(\theta)}{B^2}, \quad (4.9)$$

d'où  $\varepsilon \geq \Xi(\theta) > 0$ . C'est-à-dire quand le diamètre du voisinage auquel la fonction caractéristique correspond est suffisamment petit, il n'y a pas de points rationnels pour tout  $B$ . On ne cherche pas à trouver la valeur maximale possible de  $\Xi(\theta)$  puisque l'intérêt de cette inégalité est qu'il révèle, comme dans le cas de la distribution locale d'un point rationnel, un phénomène de « trou ». Voir A.1 pour un analogue du cas où  $\theta$  est un nombre rationnel.

#### 4.1.2 Suites de bornes évitant les solutions

On suppose comme précédemment que  $\theta = \sqrt{\frac{b}{a}}$ . Le but de cette section est double. S'appuyant sur les résultats de la section 3.1, on donne une borne effective pour (4.7) et on construit des suites de bornes telles que  $\delta_{\mathbb{P}^1, \theta, B, r}(\chi(\varepsilon, \eta)) = 0$  pour toute fonction caractéristique  $\chi(\varepsilon, \eta)$  suffisamment « petite ». On conserve les notations dans (3.7).

**Proposition 4.3.** *Pour tout  $\varepsilon > \Xi(\theta)$  (cf. (4.5)), on a, pour tout  $B \gg_\varepsilon 1$ ,*

$$\delta_{\mathbb{P}^1, \theta, B, \frac{1}{2}}(\chi(\varepsilon)) \leq 6 \sum_{|m| \leq 2\varepsilon\sqrt{ab}+1} \tau(A'm) \left( \left\lfloor \frac{\log(\varepsilon) - \log(\Xi(\theta))}{2 \log(\varepsilon_{A'B'}^*)} \right\rfloor + 1 \right),$$

où  $A', B'$  sont définis par (3.7).

**Proposition 4.4.** *Il existe une fonction d'étape  $G(\cdot) : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>1}$  qui est décroissante et continue inférieurement telle que pour tout  $\varepsilon > 0$  et tout  $\eta \in ]\frac{\varepsilon}{G(\varepsilon)}, \varepsilon[$ , on puisse choisir une suite de bornes  $(B_n)$  qui tend vers  $\infty$  de manière que*

$$\delta_{\mathbb{P}^1, \theta, B_n, \frac{1}{2}}(\chi(\varepsilon, \eta)) = 0.$$

*Démonstration.* Le lemme 3.8 nous permet de se ramener aux cas où  $\theta = \sqrt{D}$  où  $D = A'B'$  est sans facteur carré. Plus précisément, pour  $\varepsilon > \eta > 0$  et pour chaque entier  $m$ , on note

$$\varepsilon' = \frac{A'a'}{b'}\varepsilon, \quad \eta' = \frac{A'a'}{b'}\eta,$$

et  $E(\varepsilon, \eta, B)_m$  l'ensemble des points  $(u, v) \in \mathbb{N}^2$  vérifiant les conditions

$$\eta'B^{-2} < \left| \frac{u}{v} - \sqrt{D} \right| \leq \varepsilon'B^{-2}; \tag{4.10}$$

$$u^2 - v^2D = A'm. \tag{4.11}$$

Il suffit de démontrer qu'il existe  $(B_n)$  telle que  $\#E(\varepsilon, \eta, B_n) \equiv 0$  puisque

$$\delta_{\mathbb{P}^1, \theta, B, \frac{1}{2}}(\chi(\varepsilon, \eta)) \leq \sum_{m \in \mathbb{Z}} \#E(\varepsilon, \eta, B)_m. \tag{4.12}$$

On est ramené à un problème concernant des solutions des équations de Pell-Fermat. On extrait un encadrement pour  $v$ . D'une part,

$$\frac{A'|m|}{v^2} = \frac{|u^2 - v^2D|}{v^2} = \left| \frac{u}{v} - \sqrt{D} \right| \left| \frac{u}{v} + \sqrt{D} \right| \leq \frac{\varepsilon'}{B^2} \left( 2\sqrt{D} + \frac{\varepsilon'}{B^2} \right),$$

d'où

$$v^2 \geq \frac{A'|m|}{\varepsilon'(2\sqrt{D} + \frac{\varepsilon'}{B^2})} B^2.$$

D'autre part,

$$\frac{A'|m|}{v^2} = \frac{|u^2 - v^2D|}{v^2} \geq \frac{\eta'}{B^2} \left( 2\sqrt{D} - \frac{\varepsilon'}{B^2} \right),$$

d'où

$$v^2 \leq \frac{A'|m|}{\eta'(2\sqrt{D} - \frac{\varepsilon'}{B^2})} B^2.$$

En résumé, on a

$$\sqrt{\frac{A'|m|}{\varepsilon'(2\sqrt{D} + \frac{\varepsilon'}{B^2})}} B \leq |v| \leq \sqrt{\frac{A'|m|}{\eta'(2\sqrt{D} - \frac{\varepsilon'}{B^2})}} B. \tag{4.13}$$

En reportant dans (4.10), on a

$$|u - v\sqrt{D}| \leq \frac{\varepsilon'|v|}{B^2} = O_{\varepsilon, \eta} \left( \frac{1}{B} \right).$$

Donc

$$\begin{aligned}
|u + v\sqrt{D}| &\leq |u - v\sqrt{D}| + 2|v|\sqrt{D} \\
&= 2|v|\sqrt{D} + O_{\varepsilon,\eta}\left(\frac{1}{B}\right) \\
&\leq 2\sqrt{\frac{A'|m|D}{\eta'(2\sqrt{D} - \frac{\varepsilon'}{B^2})}}B + O_{\varepsilon,\eta}\left(\frac{1}{B}\right).
\end{aligned}$$

De la même manière

$$\begin{aligned}
|u + v\sqrt{D}| &\geq 2|v|\sqrt{D} - |u - v\sqrt{D}| \\
&= 2|v|\sqrt{D} + O_{\varepsilon,\eta}\left(\frac{1}{B}\right) \\
&\geq 2\sqrt{\frac{A'|m|D}{\varepsilon'(2\sqrt{D} + \frac{\varepsilon'}{B^2})}}B + O_{\varepsilon,\eta}\left(\frac{1}{B}\right).
\end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned}
\frac{\log|u + v\sqrt{D}|}{\log(\varepsilon_D^*)} &\leq \frac{1}{\log(\varepsilon_D^*)} \left( \frac{1}{2} \log(4A'|m|D) - \frac{1}{2} \log(2\eta'\sqrt{D}) + \log B \right) + O_{\varepsilon,\eta}\left(\frac{1}{B^2}\right) \\
\frac{\log|u + v\sqrt{D}|}{\log(\varepsilon_D^*)} &\geq \frac{1}{\log(\varepsilon_D^*)} \left( \frac{1}{2} \log(4A'|m|D) - \frac{1}{2} \log(2\varepsilon'\sqrt{D}) + \log B \right) + O_{\varepsilon,\eta}\left(\frac{1}{B^2}\right)
\end{aligned} \tag{4.14}$$

D'après (4.9), on a que pour  $\eta < \Xi(\theta)$ ,

$$\delta_{\mathbb{P}^1, \theta, B, \frac{1}{2}}(\chi(\varepsilon, \eta)) = \delta_{\mathbb{P}^1, \theta, B, \frac{1}{2}}(\chi(\varepsilon)).$$

Donc (4.14) entraîne une borne pour le nombre de solutions dans toute famille de solutions de l'équation

$$x^2 - Dy^2 = A'm, \quad |m| \leq 2\varepsilon\sqrt{ab} + 1. \tag{4.15}$$

L'application  $\Phi_D$  est définie par

$$\Phi_D(x, y) = \frac{\log(|x + y\sqrt{D}|)}{\log(\varepsilon_D^*)}.$$

L'image d'une famille de solutions  $J$

$$\frac{\log(J)}{\log(\varepsilon_D^*)} = \left\{ \frac{\log|a_i|}{\log(\varepsilon_D^*)} + n, n \in \mathbb{Z} \right\}$$

est un réseau dont la période est  $\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{R}$ . Prenons une famille de solutions  $J = \{\pm a_i(\varepsilon_D^*)^n, n \in \mathbb{Z}\}$ , on a (compte-tenu du signe) pour  $B \gg_{\varepsilon,\eta} 1$ ,

$$\sharp(J \cap E(\varepsilon, \Xi(\theta), B)) \leq 2 \left( \left\lfloor \frac{\log(\varepsilon) - \log(\Xi(\theta))}{2 \log(\varepsilon_{A'B'}^*)} \right\rfloor + 1 \right).$$

La proposition 3.5 donne une majoration du nombre d'orbites, on arrive à la borne dans la proposition 4.3. Donc pour tout  $n$  fixé, l'ensemble des images de toutes les solutions de (4.15), noté  $\mathcal{P}(\varepsilon)$ , est une réunion finie de réseaux de même période dans  $\mathbb{R}$  par l'application  $\Phi_D$ . Donc la fonction  $F : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$F(\varepsilon) = \begin{cases} 1 & \text{Si } \mathcal{P}(\varepsilon) = \emptyset; \\ \min_{\lambda, \beta \in \Phi_D(\mathcal{P}(\varepsilon))} |\lambda - \beta| & \text{Sinon.} \end{cases} \tag{4.16}$$

est évidemment décroissante et continue inférieurement. Elle est constante sur tout intervalle

$$\left[ \frac{n-1}{2\sqrt{ab}}, \frac{n}{2\sqrt{ab}} \right], \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Si l'on prend  $\eta, \varepsilon$  assez proches tels que

$$0 < \frac{\log(\varepsilon) - \log(\eta)}{2 \log(\varepsilon_D^*)} = \frac{\log(2\varepsilon'\sqrt{D}) - \log(2\eta'\sqrt{D})}{2 \log(\varepsilon_D^*)} < F(\varepsilon),$$

à savoir

$$\frac{\varepsilon}{G(\varepsilon)} < \eta < \varepsilon, \quad G(\varepsilon) = (\varepsilon_D^*)^{2F(\varepsilon)},$$

on peut choisir  $(B_n) \rightarrow \infty$  de sorte qu'il existe une constant  $H(\varepsilon) > 0$  tel que l'intervalle

$$I_n = \left[ \frac{1}{\log(\varepsilon_D^*)} \left( \frac{1}{2} \log(4A'|m|D) - \frac{1}{2} \log(2\eta' \sqrt{D}) + \log B_n \right), \frac{1}{\log(\varepsilon_D^*)} \left( \frac{1}{2} \log(4A'|m|D) - \frac{1}{2} \log(2\varepsilon' \sqrt{D}) + \log B_n \right) \right]$$

vérifie

$$\min_{\lambda \in \Phi_D(\mathcal{P}(\varepsilon))} \text{dist}(\lambda, I_n) > H(\varepsilon) > 0.$$

D'après (4.14), ceci démontre que  $\sharp E(\varepsilon, \eta, B_n)_m = 0$  pour tout  $|m| \leq 2\varepsilon\sqrt{ab} + 1$ . La fonction  $G$  vérifie les mêmes propriétés que celles de  $F$ , d'où la proposition 4.4.  $\square$

#### 4.1.3 Construction de suites de bornes avec des solutions

En imitant cette méthode, quand la fonction caractéristique choisie permet d'avoir une solution d'une équation Pell-Fermat généralisée, on peut choisir la suite  $(B_n)$  de la façon qu'elle donne au moins une famille de solutions.

**Proposition 4.5.** *Soit  $\theta = \sqrt{\frac{b}{a}} > 1$  avec  $\text{pgcd}(a, b) = 1$ . Pour tout couple  $(\varepsilon, \eta)$ ,  $\varepsilon > \eta > 0$ , tel que l'intervalle  $]2\sqrt{ab}\theta^{-2}\eta, 2\sqrt{ab}\theta^{-2}\varepsilon[$  contienne la valeur absolue d'un entier  $m$  de sorte que  $S_{a,b,m}^*$  contienne une solution primitive (cf. les notations du lemme (3.8)). Alors il existe une suite de bornes  $(B_n) \rightarrow \infty$  tel que*

$$\delta_{\mathbb{P}^1, \theta, B_n, \frac{1}{2}}(\chi(\varepsilon, \eta)) \geq 1, \quad \forall n \geq 1.$$

*Démonstration.* On choisit  $\lambda \in ]0, 1[$  tel que  $|m| \in ]2\sqrt{ab}\theta^{-2}\eta, 2\sqrt{ab}\theta^{-2}\varepsilon\lambda^2[$ . On suppose dans la suite que  $m > 0$ , la démonstration étant analogue lorsque  $m < 0$ . Soit  $B > 0$  tel que

$$m > \frac{2\sqrt{ab}\eta}{\theta^2} + \frac{a\varepsilon\eta}{\theta^2 B^2}, \quad B^2 > \frac{m}{a\lambda^2 - (2\varepsilon)^{-1}\theta m}. \quad (4.17)$$

On définit l'ensemble  $F(\lambda, B, m)$  des  $(u, v) \in \mathbb{N}^2$  primitifs vérifiant

$$au^2 - bv^2 = m \text{ et } \lambda B \leq u \leq B. \quad (4.18)$$

Pour  $(u, v) \in F(\lambda, B, m)$ , on a, d'après (4.18),

$$v^2 = \frac{au^2 - m}{b} \leq \frac{a}{b} B^2 - \frac{m}{b} < \frac{a}{b} B^2.$$

En revanche, grâce à la deuxième inégalité de (4.17),

$$v^2 \geq \frac{a}{b} \lambda^2 B^2 - \frac{m}{b} > \frac{m}{2\sqrt{ab}\varepsilon} B^2.$$

On note  $X = \frac{u}{v} - \theta$ . Alors la positivité de  $m$  implique celle de  $X$ . Notons que  $\frac{u}{v} + \theta = X + 2\theta$ , on obtient, d'après l'hypothèse sur  $m$ ,

$$X = \frac{m}{av^2(X + 2\theta)} < \frac{m}{2\theta av^2} < \frac{\varepsilon}{B^2}.$$

Cela entraîne aussi la majoration

$$X + 2\theta \leq 2\theta + \frac{\varepsilon}{B^2},$$

ainsi que la minoration pour  $X$  :

$$X = \frac{m}{av^2(X + 2\theta)} \geq \frac{m}{a\theta^{-2}B^2(2\theta + \frac{\varepsilon}{B^2})} \geq \frac{\eta}{B^2}$$

par la première inégalité de (4.17). Cela montre que

$$\delta_{\mathbb{P}^1, \theta, B_n, \frac{1}{2}}(\chi(\varepsilon, \eta)) \geq \sharp F(\lambda, B, m).$$

On prend  $(u_0, v_0) \in \mathbb{N}^2$  une solution primitive de l'équation

$$ax^2 - by^2 = m.$$



On définit  $((u_n, v_n))_{n \in \mathbb{N}}$  comme dans la remarque (3.11). Comme  $u_n \rightarrow \infty$ , on peut choisir  $(B_n) \rightarrow \infty$  de la manière que

$$\lambda B_n < u_n \leq B_n,$$

Donc pour tout  $n$  suffisamment grand, on a  $(u_n, v_n) \in F(\lambda, B_n, m)$ , d'où

$$\delta_{\mathbb{P}^1, \theta, B_n, \frac{1}{2}}(\chi(\varepsilon, \eta)) \geq \sharp F(\lambda, B_n, m) \geq 1.$$

□

*Démonstration du théorème 4.1.* Pour  $C, D > 0$  fixés, on peut choisir  $m \in \mathbb{N}$  tel que

$$\frac{m\theta^2}{2\sqrt{ab}} > 2C,$$

et que  $S_{a,b,m}^*$  contienne une solution primitive (Remarque 3.11). Rappelons les propriétés des fonctions  $F$  et  $G$  dans la démonstration de la proposition 4.4. Il existe alors  $\delta_0 > 0$  tel que

$$G(x) = G\left(\frac{m\theta^2}{2\sqrt{ab}}\right) \leq |\varepsilon_D^*|^2, \quad \forall x \in \left[\frac{m\theta^2}{2\sqrt{ab}}, \frac{m\theta^2}{2\sqrt{ab}} + \delta_0\right].$$

On définit

$$\delta_1 = \min\left(\frac{m\theta^2}{2\sqrt{ab}}\left(G\left(\frac{m\theta^2}{2\sqrt{ab}}\right) - 1\right), \frac{D}{2}, \delta_0, C\right) > 0.$$

Maintenant on prend

$$\varepsilon = \frac{m\theta^2}{2\sqrt{ab}} + \frac{\delta_1}{2}, \quad \eta \in \left[\frac{m\theta^2}{2\sqrt{ab}} - \frac{\delta_1}{2|\varepsilon_D^*|^2}, \frac{m\theta^2}{2\sqrt{ab}}\right].$$

Puisque

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{G(\varepsilon)} &= \frac{\frac{m\theta^2}{2\sqrt{ab}} + \delta_1}{G\left(\frac{m\theta^2}{2\sqrt{ab}}\right)} - \frac{\delta_1}{2G\left(\frac{m\theta^2}{2\sqrt{ab}}\right)} \\ &\leq \frac{m\theta^2}{2\sqrt{ab}} - \frac{\delta_1}{2G\left(\frac{m\theta^2}{2\sqrt{ab}}\right)} \\ &\leq \frac{m\theta^2}{2\sqrt{ab}} - \frac{\delta_1}{2|\varepsilon_D^*|^2} < \eta, \end{aligned}$$

Le couple  $(\varepsilon, \eta)$  vérifie toutes les hypothèses des propositions 4.4, 4.5. Compte-tenu de la majoration fournie par la proposition 4.3, il en découle donc que

$$\liminf_B \delta_{\mathbb{P}^1, Q, B, \frac{1}{2}}(\chi(\varepsilon, \eta)) = 0 < 1 \leq \limsup_B \delta_{\mathbb{P}^1, Q, B, \frac{1}{2}}(\chi(\varepsilon, \eta)) \leq \limsup_B \delta_{\mathbb{P}^1, Q, B, \frac{1}{2}}(\chi(\varepsilon)) = O_\varepsilon(1).$$

□

## 4.2 Zoom sous-critique

On va prouver un résultat sur la distribution locale en un point réel vérifiant des inégalités de type analogue à celle de Liouville, qui *a fortiori* s'applique aux nombres algébriques. Pour cela on rappelle des notions standard d'approximation diophantienne des nombres réels.

**Définition 4.6.** Soit  $t > 0$ . On dit qu'un nombre réel  $\theta$  a un *ordre d'irrationalité*  $t$  s'il existe une constante  $C = C(\theta, t)$  telle que

$$\left|\theta - \frac{m}{n}\right| \geq \frac{C}{n^t} \quad \forall (m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*. \quad (4.19)$$

La *mesure d'irrationalité*  $m(\theta)$  est la borne inférieure de l'ensemble des ordres d'irrationalité de  $\theta$ . De manière équivalente, elle est égale au maximum des nombres  $s$  tels que

$$\liminf_q q^{s-1} \min(\{q\theta\}, 1 - \{q\theta\}) = 0.$$

Si  $\theta$  est algébrique,  $m(\theta)$  est rien d'autre que la constante d'approximation  $\alpha(\theta, \mathbb{P}^1)$  associée au fibré  $\mathcal{O}(1)$ .

**Théorème 4.7** (Dirichlet, Liouville, Roth). *Le nombre 2 est un ordre d'irrationalité et la mesure d'irrationalité d'un nombre quadratique. Pour tout  $\varepsilon > 0$ , le nombre  $2 + \varepsilon$  est un ordre d'irrationalité d'un nombre algébrique de degré  $\geq 3$  dont la mesure d'irrationalité est 2.*

Le résultat principal de cette section est le suivant, qui est valide pour tout nombre algébrique de degré  $\geq 2$ . Pour ceux dont le degré est 2, on a une meilleur contrôle du terme d'erreur.

**Théorème 4.8.** *Soient  $\alpha$  un nombre réel et  $r > \frac{1}{2}$ . Alors pour tout  $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 \geq 0$  et  $\tau > 0$ ,*

— *si  $\frac{1}{2} < r \leq 1$ , supposons que  $m(\alpha) = 2$ , on a*

$$\delta_{\mathbb{P}^1, \alpha, B, r}(\chi(\varepsilon_1, \varepsilon_2)) = B^{2-\frac{1}{r}} \frac{3}{\pi^2 \sup(1, \alpha^2)} \int \chi(\varepsilon_1, \varepsilon_2) dx + O_{\alpha, \varepsilon_i, \tau}(B^{1-\frac{1}{2r}+\tau}). \quad (4.20)$$

*Si de plus 2 est un ordre d'irrationalité de  $\alpha$ , à savoir  $\exists \Xi(\alpha) \in ]0, 1[$  tel que pour tout nombre rationnel  $\frac{p}{q}$  on ait*

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{\Xi(\alpha)}{q^2} \Leftrightarrow d(q\alpha, \mathbb{Z}) \geq \frac{\Xi(\alpha)}{q}, \quad (4.21)$$

*on a, en notant*

$$\Delta(\alpha) = \frac{\Xi(\alpha)^{-1}}{\log(\Xi(\alpha)^{-1})}, \quad (4.22)$$

$$\delta_{\mathbb{P}^1, \alpha, B, r}(\chi(\varepsilon_1, \varepsilon_2)) = B^{2-\frac{1}{r}} \frac{3}{\pi^2 \sup(1, \alpha^2)} \int \chi(\varepsilon_1, \varepsilon_2) dx + O_{\varepsilon_i} \left( \Delta(\alpha) \Xi(\alpha)^{-\frac{1}{2}} B^{1-\frac{1}{2r}} \log(B) \log(\Xi(\alpha)^{-\frac{1}{2}} B^{1-\frac{1}{2r}}) \right). \quad (4.23)$$

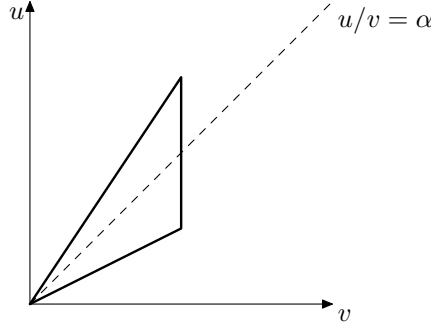
— *si  $r > 1$ , on a*

$$\delta_{\mathbb{P}^1, \alpha, B, r}(\chi(\varepsilon_1, \varepsilon_2)) = B^{2-\frac{1}{r}} \frac{3}{\pi^2 \sup(1, \alpha^2)} \int \chi(\varepsilon_1, \varepsilon_2) dx + O_{|\alpha|, \varepsilon_i}(B \log B).$$

**Remarque 4.9.** La dépendance du terme d'erreur dans (4.20) sur  $\alpha$  et  $\tau$  est intrinsèque au sens similaire au théorème de Roth. En effet, elle dépende de les constante  $C(\alpha, t)$  dans (4.19) avec  $t$  proche de 2 (cf. aussi (4.32) *infra*). Alors que le terme d'erreur dans (4.23) ne dépende que de la taille de  $\alpha$ .

Tout d'abord on reformule ce problème de zoom en un problème de dénombrement. Pour  $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 \geq 0, B > 0$ , on définit  $S(\varepsilon_1, \varepsilon_2, B)$  l'ensemble des point  $[u : v]$  vérifiant

$$\text{pgcd}(u, v) = 1, \quad \varepsilon_2 B^{-\frac{1}{r}} < \left| \frac{u}{v} - \alpha \right| \leq \varepsilon_1 B^{-\frac{1}{r}}, \quad \max(|u|, |v|) \leq B \quad (4.24)$$



Graphiquement, si l'on prend  $\varepsilon_2 = 0$ , c'est-à-dire on prend la fonction de test  $\chi(\varepsilon)$  et on calcule  $\delta_{\mathbb{P}^1, \alpha, B, r}(\chi(\varepsilon))$ , on compte des points entiers primitifs à l'intérieur du triangle dont l'aire est d'ordre de grandeur  $B^{2-\frac{1}{r}}$  et celle de la longueur du bord est  $B$ . Donc la comparaison classique avec l'aire du triangle n'est utilisable que pour les cas où  $r > 1$ . Ceux où  $r \leq 1$  nécessitent un travail supplémentaire. Notre approche s'appuie sur la théorie d'équirépartition modulo 1 utilisée dans [20].

**Définition 4.10.** Soit  $(x_n)_n$  une suite de nombres réels. Elle est dite *équirépartie modulo 1* si pour tout  $0 \leq a < b \leq 1$ , on a

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \# \{1 \leq n \leq N : \{x_n\} \in [a, b]\} = b - a.$$

Soit  $(x_n)$  une suite de nombres réels équirépartie modulo 1. Soit  $N > 0$ . La *discrépance* (à  $N$ )  $D_{(x_n)}(N)$  de cette suite est définie par

$$D_{(x_n)}(N) = \sup_{\lambda \in [0, 1]} \left| \frac{\#\{n \leq N : \{x_n\} \in [0, \lambda]\}}{N} - \lambda \right|.$$

Si la suite  $(x_n) = (n\alpha)$  pour un nombre  $\alpha$  réel fixé, on notera  $D_\alpha(N) = D_{(n\alpha)}(N)$ .

On rappelle l'inégalité de Koksma-Denjoy pour les suites équiréparties modulo 1. (Voir, par exemple, [16] p. 143)

**Théorème 4.11** (Koksma-Denjoy). *Soient  $(x_n)$  une suite équirépartie modulo 1 et  $N \geq 1$ . Soit  $\phi$  une fonction mesurable à variation bornée définie sur  $[0, 1]$  (on note  $V(\phi)$  la variation totale de  $\phi$ ). Alors*

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \phi(\{x_n\}) - \int_0^1 \phi \right| \leq V(\phi) D_{(x_n)}(N).$$

L'inégalité de Erdős-Turán donne un contrôle de la discrétance (cf. [16] p. 122-123) pour les nombres irrationnels dont la mesure d'irrationalité est finie.

**Théorème 4.12** (Erdős-Turán). *Soit  $\theta$  un nombre irrationnel ayant un ordre d'irrationalité  $t > 0$ . Alors pour tout  $\sigma > 0$ , on a*

$$D_\theta(N) = O_{\sigma, \theta, t}(N^{-\frac{1}{t-1} + \sigma}).$$

Si les quotients partiels dans l'expansion en fraction continue d'un nombre irrationnel sont borné, de manière équivalente, l'inégalité de Liouville (4.21) étant vérifiée, alors une meilleure majoration de la discrétance existe (cf. [16, Theorem 3.4], p. 125).

**Théorème 4.13.** *Soient  $\vartheta = [a_0; a_1, \dots]$  un nombre irrationnel. Supposons que les quotients partiels de  $\vartheta$  sont bornés, i.e. il existe  $M > 0$  tel que  $a_i \leq M, \forall i \geq 1$ . Alors*

$$ND_\vartheta(N) \leq 3 + \left( \frac{1}{\log \xi} + \frac{M}{\log(M+1)} \right) \log N,$$

où  $\xi = (1 + \sqrt{5})/2$ .

**Lemme 4.14.** *Soit  $\vartheta$  un nombre irrationnel. Supposons qu'il existe  $C(\vartheta) \in ]0, 1[$  tel que pour tout nombre rationnel  $\frac{p}{q}$ , on ait*

$$\left| \vartheta - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{C(\vartheta)}{q^2}. \quad (4.25)$$

*Soit  $\vartheta = [a_0; a_1, \dots]$  son expansion en fraction continue. Alors pour tout  $i \geq 1$ ,*

$$a_i \leq (C(\vartheta))^{-1}.$$

*Par conséquent,*

$$ND_\vartheta(N) = O\left(\frac{C(\vartheta)^{-1}}{\log(C(\vartheta)^{-1})} \log N\right).$$

*Démonstration.* Soient  $(\frac{p_k}{q_k})_{n=-1}^\infty$  les convergents principaux de  $\vartheta$ . Alors ils vérifient, pour tout  $k \geq 1$ , la règle de récurrence (voir [15, Theorem 1])

$$p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2};$$

$$q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2},$$

et (voir [15, Theorem 9]) pour tout  $k \geq 0$ ,

$$\left| \vartheta - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{1}{q_k q_{k+1}}.$$

Il en découle que  $q_{k+1} > a_{k+1} q_k$  et donc

$$\left| \vartheta - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{1}{a_{k+1} q_k^2}.$$

En reportant dans (4.25), on obtient que pour  $k \geq 0$ ,

$$a_{k+1} \leq (C(\vartheta))^{-1}.$$

□

*Démonstration du théorème 4.8.* On peut supposer que  $\alpha > 0$ . On fixe  $\varepsilon > 0, B > 0$ .

**Cas  $\frac{1}{2} < r \leq 1$ .** On suppose que  $\alpha > 1$ . La première étape est de comparer le cardinal de  $S(\varepsilon_1, \varepsilon_2, B)$  (4.24) avec celui de  $T(\varepsilon_1, \varepsilon_2, B)$  qui consiste en les  $(u, v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$  de sorte que

$$\text{pgcd}(u, v) = 1, \quad \varepsilon_2 B^{-\frac{1}{r}} < \left| \frac{u}{v} - \alpha \right| \leq \varepsilon_1 B^{-\frac{1}{r}}, \quad v \leq B/\alpha \quad (4.26)$$

On prend  $(u, v) \in S(\varepsilon_1, \varepsilon_2, B)$ . Alors (4.24) implique que

$$|u - \alpha v| \leq \varepsilon_1 B^{-\frac{1}{r}} v \leq \varepsilon_1.$$

Donc pour un tel  $v$  choisi, il n'y a qu'un nombre fini de choix pour  $u$ . De plus on a

$$|v| \leq \alpha^{-1}(\varepsilon_1 + |u|) \leq B/\alpha + \varepsilon_1/\alpha.$$

On en conclut que

$$\sharp(S(\varepsilon_1, \varepsilon_2, B) \setminus T(\varepsilon_1, \varepsilon_2, B)) = O_{\varepsilon_i}(1).$$

Réciproquement, si l'on prend  $(u, v) \in T(\varepsilon_1, \varepsilon_2, B)$ , (4.26) implique que

$$|u| \leq |v|(\alpha + \varepsilon_1 B^{-\frac{1}{r}}) \leq B + \varepsilon_1/\alpha.$$

On en conclut de façon analogue que

$$\sharp(T(\varepsilon_1, \varepsilon_2, B) \setminus S(\varepsilon_1, \varepsilon_2, B)) = O_{\varepsilon_i}(1),$$

et ainsi que

$$\sharp S(\varepsilon_1, \varepsilon_2, B) = \sharp T(\varepsilon_1, \varepsilon_2, B) + O_{\varepsilon_i}(1). \quad (4.27)$$

On est ramené à calculer le cardinal de l'ensemble  $T(\varepsilon_1, \varepsilon_2, B)$ . À l'aide de l'inversion de Möbius, on définit pour  $d \in \mathbb{N}$ ,

$$T(\varepsilon_1, \varepsilon_2, B) = \sum_{d \in \mathbb{N}^*} \mu(d) (\sharp T_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2, d, B) + \sharp T_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2, d, B)), \quad (4.28)$$

où  $T_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2, d, B)$  consiste en les  $(u, v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$  tels que

$$\varepsilon_2 B^{-\frac{1}{r}} < \frac{u}{v} - \alpha \leq \varepsilon_1 B^{-\frac{1}{r}}, \quad v \leq \frac{B}{\alpha d} \quad (4.29)$$

et  $T_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2, d, B)$  consiste en les  $(u, v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$  tels que

$$-\varepsilon_1 B^{-\frac{1}{r}} \leq \frac{u}{v} - \alpha < -\varepsilon_2 B^{-\frac{1}{r}}, \quad v \leq \frac{B}{\alpha d} \quad (4.30)$$

On obtient une borne sur  $d$  de la façon suivante. D'une part,

$$d(\alpha v, \mathbb{Z}) \leq |u - \alpha v| \leq \varepsilon_1 v B^{-\frac{1}{r}} \leq \varepsilon_1 \frac{B^{1-\frac{1}{r}}}{d}. \quad (4.31)$$

D'après l'hypothèse sur  $\alpha$ , pour tout  $\lambda > 0$ , il existe une constante  $C(\alpha, \lambda) > 0$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{Z}^*$ ,

$$d(\alpha n, \mathbb{Z}) \geq \frac{C(\alpha, \lambda)}{n^{1+\lambda}}.$$

Donc

$$d(\alpha v, \mathbb{Z}) \geq \frac{C(\alpha, \lambda)}{v^{1+\lambda}} \geq \frac{C(\alpha, \lambda) d^{1+\lambda}}{B^{1+\lambda}}.$$

En combinant les deux inégalités on obtient

$$\varepsilon_1 \frac{B^{1-\frac{1}{r}}}{d} \geq C(\alpha, \lambda) \frac{d^{1+\lambda}}{B^{1+\lambda}},$$

Donc on peut restreindre la somme en  $d$  à ceux vérifiant

$$d \leq \left( \frac{\varepsilon_1}{C(\alpha, \lambda)} \right)^{\frac{1}{2+\lambda}} B^{1-\frac{1}{(2+\lambda)r}} = D(\alpha, \varepsilon_1, \lambda) B^{1-\frac{1}{(2+\lambda)r}}. \quad (4.32)$$

Si de plus (4.21) est valide, alors

$$d(\alpha v, \mathbb{Z}) \geq \frac{\Xi(\alpha)}{v} \geq \frac{\Xi(\alpha)d}{B}.$$

Dans ce cas en combinant (4.31) on obtient

$$d \leq \left( \frac{\varepsilon_1}{\Xi(\alpha)} \right)^{\frac{1}{2}} B^{1-\frac{1}{2r}}. \quad (4.33)$$

On établit maintenant les formules asymptotiques suivantes un peu plus générales faisant intervenir une constante fixée  $K$ , qui permet de l'appliquer à une hauteur équivalente à celle donnée. Pour une utilisation ultérieure, on précise la dépendance en  $K$  du terme d'erreur.

**Proposition 4.15.** *Fixons  $d \in \mathbb{N}, K > 0$  et  $\varepsilon > \eta \geq 0$ . Supposons que*

$$(\varepsilon - \eta)KB^{1-\frac{1}{r}} < \frac{\alpha}{4}. \quad (4.34)$$

*On définit l'ensemble  $T_K(\varepsilon, \eta, d, B)$  des  $(u, v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$  satisfaisant à  $v \leq \frac{K}{\alpha d}B$  ainsi que*

$$\eta B^{-\frac{1}{r}} < \frac{u}{v} - \alpha \leq \varepsilon B^{-\frac{1}{r}}. \quad (4.35)$$

*Alors pour tout  $\sigma > 0$  et pour tout  $N > \max(1, \frac{4\eta K}{\alpha d})$ ,*

$$\#T_K(\varepsilon, \eta, d, B) = \frac{(\varepsilon - \eta)K^2}{2\alpha^2 d^2} B^{2-\frac{1}{r}} + O_{\varepsilon, \eta} \left( \frac{K^2 B^{2-\frac{1}{r}}}{Nd^2} \right) + O_{\sigma} \left( \frac{K^{\sigma} B^{\sigma} N}{d^{\sigma}} \right). \quad (4.36)$$

*Si de plus (4.21) est vérifiée, on a*

$$\#T_K(\varepsilon, \eta, d, B) = \frac{(\varepsilon - \eta)K^2}{2\alpha^2 d^2} B^{2-\frac{1}{r}} + O_{\varepsilon, \eta} \left( \frac{K^2 B^{2-\frac{1}{r}}}{Nd^2} \right) + O(\Delta(\alpha)N \log(KB)). \quad (4.37)$$

*Les formules ci-dessus restent valides si l'on remplace (4.35) par*

$$-\varepsilon B^{-\frac{1}{r}} \leq \frac{u}{v} - \alpha < -\eta B^{-\frac{1}{r}}. \quad (4.38)$$

*Démonstration.* Soit  $N > 1$  fixé dans la suite. On peut supposer que  $N$  est un entier (quitte à rajouter des constantes absolues dans les termes d'erreur). On considère le découpage de l'intervalle  $]0, \frac{K}{\alpha d}B]$  en les intervalles

$$\left] \frac{(k-1)KB}{\alpha d N}, \frac{kKB}{\alpha d N} \right], \quad (1 \leq k \leq N). \quad (4.39)$$

Soit  $(u_0, v_0) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$  tel que

$$\frac{(k-1)KB}{\alpha d N} < v_0 \leq \frac{kKB}{\alpha d N} \text{ et } \eta B^{-\frac{1}{r}} < \frac{u_0}{v_0} - \alpha \leq \varepsilon B^{-\frac{1}{r}},$$

on a

$$\eta v_0 B^{1-\frac{1}{r}} > \frac{\eta(k-1)K}{\alpha d N} B^{1-\frac{1}{r}}, \quad \varepsilon v_0 B^{1-\frac{1}{r}} \leq \frac{\varepsilon k K}{\alpha d N} B^{1-\frac{1}{r}}.$$

et donc

$$\frac{\eta K(k-1)}{\alpha d N} B^{1-\frac{1}{r}} < u_0 - \alpha v_0 \leq \frac{\varepsilon k K}{\alpha d N} B^{1-\frac{1}{r}}.$$

D'après la condition (4.34) et le choix de  $N$ ,

$$\frac{\varepsilon k K}{\alpha d N} B^{1-\frac{1}{r}} - \frac{\eta(k-1)K}{\alpha d N} B^{1-\frac{1}{r}} = \frac{(\varepsilon - \eta)kK}{\alpha d N} B^{1-\frac{1}{r}} + \frac{\eta K B^{1-\frac{1}{r}}}{\alpha d N} < \frac{1}{2}.$$

On en conclut que pour tout  $k \leq N$  et pour tout entier  $v$  fixé, il existe au plus un entier  $u$  tel que  $(u, v) \in T_K(\varepsilon, \eta, d, B)$  sont uniques. Fixons dans la suite  $k$  et considérons l'intervalle

$$J_k = \left[ -\frac{\varepsilon k K}{\alpha d N} B^{1-\frac{1}{r}}, -\frac{\eta(k-1)K}{\alpha d N} B^{1-\frac{1}{r}} \right].$$

On cherche maintenant une équivalence de l'hypothèse suivante :

**(H)** Pour  $v \in \mathbb{N}$  fixé, il existe un (unique)  $u \in \mathbb{Z}$  tel que  $u - \alpha v \in \left] \frac{\eta(k-1)K}{\alpha d N} B^{1-\frac{1}{r}}, \frac{\varepsilon k K}{\alpha d N} B^{1-\frac{1}{r}} \right[$ .

La difficulté de la démonstration qui suit vient du cas  $r = 1$ , pour lequel l'intervalle  $J_k$  peut contenir un entier, y compris pour des grandes valeurs de  $B$ . On a les deux possibilités suivantes :

**Cas I** : l'intervalle  $J_k$  contient un entier  $u_k$ . Alors on a

$$J_k - (u_k - 1) = \left[ -\frac{\varepsilon k K}{\alpha d N} B^{1-\frac{1}{r}} - (u_k - 1), 1 \right] \cup \left[ 1, -\frac{\eta(k-1)K}{\alpha d N} B^{1-\frac{1}{r}} - (u_k - 1) \right].$$

Alors **(H)** revient à dire que

$$\begin{aligned} \{\alpha v\} = \alpha v - u - (u_k - 1) &\in I_{k,1} = \left[ -\frac{\varepsilon k K}{\alpha d N} B^{1-\frac{1}{r}} - (u_k - 1), 1 \right[ \\ \text{ou } \{\alpha v\} = \alpha v - u - u_k &\in I_{k,2} = \left[ 0, -\frac{\eta(k-1)K}{\alpha d N} B^{1-\frac{1}{r}} - u_k \right[. \end{aligned}$$

Réciproquement, si  $v$  vérifie l'une des conditions ci-dessus, l'entier  $u$  tel que **(H)** soit vérifiée existe et vaut  $\alpha v - \{\alpha v\} - u_k + 1$  ou  $\alpha v - \{\alpha v\} - u_k$  selon l'appartenance de  $\{\alpha v\}$ . Notons que  $I_{k,1} \cap I_{k,2} = \emptyset$ . En désignant  $I_k = I_{k,1} \cup I_{k,2} \subset ]0, 1[$ , qui est soit un intervalle (si l'un des  $I_{k,i}$  est vide), soit la réunion disjointe de deux intervalles, on conclut que la condition **(H)** est équivalente à  $\{\alpha v\} \in I_k$ .

**Cas II** : l'intervalle  $J_k$  ne contient aucun entier. Suppose que  $J_k \subset ]u_k - 1, u_k[$  où  $u_k \in \mathbb{Z}$ . Alors dans ce cas **(H)** est équivalente à

$$\{\alpha v\} = \alpha v - u - (u_k - 1) \in I_k = \left[ -\frac{\varepsilon k K}{\alpha d N} B^{1-\frac{1}{r}} - (u_k - 1), -\frac{\eta(k-1)K}{\alpha d N} B^{1-\frac{1}{r}} - (u_k - 1) \right[ \subset ]0, 1[.$$

On vérifie que l'on a une équivalence analogue si l'on suppose (4.38). Ayant établi cette équivalence, on peut réduire le comptage en deux variables  $(u, v)$  en une seule  $v$ . Par l'abuse de notation, pour une propriété  $\mathcal{P}(x)$ , on note  $1_{\mathcal{P}(x)} = 1_{\mathcal{P}(x)}(x)$  la fonction qui vaut 1 si  $\mathcal{P}(x)$  est vérifiée et vaut 0 sinon. Nous avons la décomposition suivante

$$\begin{aligned} \sharp T_K(\varepsilon, \eta, d, B) &= \sum_{1 \leq k \leq N} \sum_{\frac{(k-1)KB}{\alpha d N} < v \leq \frac{kKB}{\alpha d N}} \sum_{u \in \mathbb{Z}} 1_{\eta v B^{-\frac{1}{r}} < u - \alpha v \leq \varepsilon v B^{-\frac{1}{r}}} \\ &= \sum_{1 \leq k \leq N} \left( \sum_{\frac{(k-1)KB}{\alpha d N} < v \leq \frac{kKB}{\alpha d N}} 1_{\{\alpha v\} \in I_k} \right) + \text{Er}, \\ &= \sum_{1 \leq k \leq N} T_{\varepsilon, \eta, d, k, B} + \text{Er}. \end{aligned} \tag{4.40}$$

où le terme d'erreur

$$\begin{aligned} |\text{Er}| &\leq 2 \sum_{1 \leq k \leq N} \sum_{\frac{(k-1)KB}{\alpha d N} < v \leq \frac{kKB}{\alpha d N}} 1_{\substack{\varepsilon v B^{-\frac{1}{r}} < u - \alpha v < \frac{\varepsilon k K}{\alpha d N} B^{1-\frac{1}{r}} \\ \text{ou } \frac{\eta(k-1)K}{\alpha d N} B^{1-\frac{1}{r}} \leq u - \alpha v \leq \eta v B^{-\frac{1}{r}}}} \\ &\leq 2 \sum_{1 \leq k \leq N} \sum_{\frac{(k-1)KB}{\alpha d N} < v \leq \frac{kKB}{\alpha d N}} \left( 1_{\frac{\varepsilon(k-1)K}{\alpha d N} B^{1-\frac{1}{r}} < u - \alpha v < \frac{\varepsilon k K}{\alpha d N} B^{1-\frac{1}{r}}} + 1_{\frac{\eta(k-1)K}{\alpha d N} B^{1-\frac{1}{r}} \leq u - \alpha v \leq \frac{\eta k K}{\alpha d N} B^{1-\frac{1}{r}}} \right) \\ &= 2 \sum_{1 \leq k \leq N} E_{\varepsilon, d, k, B} + E_{\eta, d, k, B}. \end{aligned}$$

On traite d'abord le terme principal en appliquant les Théorèmes 4.12 et 4.11. On définit la fonction  $\phi_k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  comme

$$\phi_k(u) = 1_{u \in I_k}(u). \tag{4.41}$$

On décompose  $T_{\varepsilon, \eta, d, k, B}$  comme

$$T_{\varepsilon, \eta, d, k, B} = \sum_{v \leq \frac{kKB}{\alpha d N}} 1_{\{\alpha v\} \in I_k} - \sum_{v \leq \frac{(k-1)KB}{\alpha d N}} 1_{\{\alpha v\} \in I_k} = T_1 - T_2.$$

D'après le Théorème 4.11 et le théorème 4.12 (avec  $t = 1$ ),

$$\begin{aligned}
T_{1,k} &= \sum_{v \leq \frac{kKB}{\alpha dN}} \mathbf{1}_{\{\alpha v\} \in I_k} \\
&= \frac{kK}{\alpha d} \frac{B}{N} \left( \int_0^1 \phi_k + O \left( D_\alpha \left( \frac{kK}{\alpha d} \frac{B}{N} \right) \right) \right) \\
&= \frac{kK}{\alpha d} \frac{B}{N} |I_k| + O \left( \frac{kK}{\alpha d} \frac{B}{N} D_\alpha \left( \frac{kK}{\alpha d} \frac{B}{N} \right) \right) \\
&= \frac{(\varepsilon - \eta)k^2 K^2}{\alpha^2 d^2} \frac{B^{2-\frac{1}{r}}}{N^2} + \frac{\eta k K^2}{\alpha^2 d^2} \frac{B^{2-\frac{1}{r}}}{N^2} + O \left( \frac{k^\sigma K^\sigma B^\sigma}{d^\sigma N^\sigma} \right)
\end{aligned}$$

où la constante implicite dépend de  $\sigma$  et  $\alpha$ . De façon similaire on obtient

$$\begin{aligned}
T_{2,k} &= \sum_{v \leq \frac{(k-1)KB}{\alpha dN}} \mathbf{1}_{\{\alpha v\} \in I_k} \\
&= \frac{(\varepsilon - \eta)k(k-1)K^2}{\alpha^2 d^2} \frac{B^{2-\frac{1}{r}}}{N^2} + \frac{\eta(k-1)K^2}{\alpha^2 d^2} \frac{B^{2-\frac{1}{r}}}{N^2} + O \left( \frac{k^\sigma K^\sigma B^\sigma}{d^\sigma N^\sigma} \right).
\end{aligned}$$

Donc

$$T_{\varepsilon,\eta,d,k,B} = \frac{(\varepsilon - \eta)kK^2}{\alpha^2 d^2} \frac{B^{2-\frac{1}{r}}}{N^2} + \frac{\eta K^2}{\alpha^2 d^2} \frac{B^{2-\frac{1}{r}}}{N^2} + O \left( \frac{k^\sigma K^\sigma B^\sigma}{d^\sigma N^\sigma} \right). \quad (4.42)$$

On somme sur tous les  $k$ . Faisons-le d'abord pour le terme principal de  $T_{\varepsilon,\eta,d,k,B}$  (4.42) :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^N \left( \frac{(\varepsilon - \eta)kK^2}{\alpha^2 d^2} \frac{B^{2-\frac{1}{r}}}{N^2} + \frac{\eta K^2}{\alpha^2 d^2} \frac{B^{2-\frac{1}{r}}}{N^2} \right) &= \frac{(\varepsilon - \eta)K^2}{\alpha^2 d^2} \frac{N(N+1)}{2N^2} B^{2-\frac{1}{r}} + \frac{\eta K^2}{\alpha^2 d^2} \frac{B^{2-\frac{1}{r}}}{N} \\
&= \frac{(\varepsilon - \eta)K^2}{\alpha^2 d^2} B^{2-\frac{1}{r}} + O_{\varepsilon,\eta} \left( \frac{K^2 B^{2-\frac{1}{r}}}{Nd^2} \right).
\end{aligned}$$

Ensuite pour le terme d'erreur de  $T_{\varepsilon,d,k,B}$  (4.42) :

$$\sum_{k=1}^N \frac{k^\sigma K^\sigma B^\sigma}{d^\sigma N^\sigma} = O \left( \frac{K^\sigma B^\sigma N}{d^\sigma} \right). \quad (4.43)$$

On obtient

$$\sum_{k=1}^N T_{\varepsilon,\eta,d,k,B} = \frac{(\varepsilon - \eta)K^2}{2\alpha^2 d^2} B^{2-\frac{1}{r}} + O_{\varepsilon,\eta} \left( \frac{K^2 B^{2-\frac{1}{r}}}{Nd^2} \right) + O_\sigma \left( \frac{K^\sigma B^\sigma N}{d^\sigma} \right) \quad (4.44)$$

où la constante implicite dépend de  $\sigma$  et  $\alpha$ . Ensuite on estime le terme Er en utilisant la même méthode. En imitant la discussion pour  $T_{\varepsilon,\eta,d,k,B}$ , on en conclut de l'existence des ensembles  $L_{1,k}, L_{2,k}$  qui sont la réunion de au plus 2 intervalles disjoints de  $[0, 1[$  et

$$|L_{1,k}| = \frac{\varepsilon K}{\alpha dN} B^{1-\frac{1}{r}}, \quad |L_{2,k}| = \frac{\eta K}{\alpha dN} B^{1-\frac{1}{r}}$$

tels que

$$\begin{aligned}
u - \alpha v &\in \left[ \frac{\varepsilon(k-1)K}{\alpha dN} B^{1-\frac{1}{r}}, \frac{\varepsilon kK}{\alpha dN} B^{1-\frac{1}{r}} \right] \iff \{\alpha v\} \in L_{1,k} \\
u - \alpha v &\in \left[ \frac{\eta(k-1)K}{\alpha dN} B^{1-\frac{1}{r}}, \frac{\eta kK}{\alpha dN} B^{1-\frac{1}{r}} \right] \iff \{\alpha v\} \in L_{2,k}
\end{aligned}$$

On décompose  $E_{\varepsilon,d,k,B}$  comme

$$E_{\varepsilon,d,k,B} = \sum_{v \leq \frac{kKB}{\alpha dN}} \mathbf{1}_{\{\alpha v\} \in L_{1,k}} - \sum_{v \leq \frac{(k-1)KB}{\alpha dN}} \mathbf{1}_{\{\alpha v\} \in L_{1,k}} = S_{1,k} - S_{2,k}.$$

On estime les  $S_{i,k}$  ( $1 \leq i \leq 2$ ) en appliquant une autre fois les Théorèmes 4.11 et 4.12.

$$S_{1,k} = \frac{\varepsilon k K^2}{\alpha^2 d^2} \frac{B^{2-\frac{1}{r}}}{N^2} + O\left(\frac{k^\sigma K^\sigma B^\sigma}{d^\sigma N^\sigma}\right); \quad S_{2,k} = \frac{\varepsilon(k-1)K^2}{\alpha^2 d^2} \frac{B^{2-\frac{1}{r}}}{N^2} + O\left(\frac{k^\sigma K^\sigma B^\sigma}{d^\sigma N^\sigma}\right).$$

Donc

$$E_{\varepsilon,d,k,B} = \frac{\varepsilon K^2}{\alpha^2 d^2} \frac{B^{2-\frac{1}{r}}}{N^2} + O\left(\frac{k^\sigma K^\sigma B^\sigma}{d^\sigma N^\sigma}\right).$$

On obtient aussi une formule analogue pour  $E_{\eta,d,k,B}$ . Ainsi

$$\begin{aligned} \text{Er} &= \sum_{k=1}^N O_{\varepsilon,\eta} \left( \frac{K^2}{\alpha^2 d^2} \frac{B^{2-\frac{1}{r}}}{N^2} \right) + O_\sigma \left( \frac{k^\sigma K^\sigma B^\sigma}{d^\sigma N^\sigma} \right) \\ &= O_{\varepsilon,\eta} \left( \frac{K^2 B^{2-\frac{1}{r}}}{N d^2} \right) + O_\sigma \left( \frac{K^\sigma B^\sigma N}{d^\sigma} \right). \end{aligned} \quad (4.45)$$

En résumé de (4.44) et (4.45), on a démontré que pour  $\alpha$  général ayant la mesure d'irrationalité 2,

$$\sharp T_K(\varepsilon, \eta, d, B) = \frac{(\varepsilon - \eta)K^2}{2\alpha^2 d^2} B^{2-\frac{1}{r}} + O_{\varepsilon,\eta} \left( \frac{K^2 B^{2-\frac{1}{r}}}{N d^2} \right) + O_\sigma \left( \frac{K^\sigma B^\sigma N}{d^\sigma} \right). \quad (4.46)$$

Maintenant, supposons la validité de l'inégalité (4.21). Il suffit de modifier tous les termes d'erreur concernant la discrédance, à savoir, les termes qui contiennent  $\sigma$ . Plus précisément, en utilisant le lemme 4.14, on a

$$\sum_{1 \leq k \leq N} \frac{kK}{\alpha d} \frac{B}{N} D_\alpha \left( \frac{kK}{\alpha d} \frac{B}{N} \right) = \sum_{1 \leq k \leq N} O \left( \Delta(\alpha) \log \left( \frac{kK}{\alpha d} \frac{B}{N} \right) \right) = O \left( \Delta(\alpha) N \log \left( \frac{KB}{\alpha d} \right) \right)$$

et donc,

$$\begin{aligned} \sharp T_K(\varepsilon, \eta, d, B) &= \frac{(\varepsilon - \eta)K^2}{2\alpha^2 d^2} B^{2-\frac{1}{r}} + O_{\varepsilon,\eta} \left( \frac{K^2 B^{2-\frac{1}{r}}}{N d^2} \right) + O \left( \Delta(\alpha) N \log \left( \frac{KB}{\alpha d} \right) \right) \\ &= \frac{(\varepsilon - \eta)K^2}{2\alpha^2 d^2} B^{2-\frac{1}{r}} + O_{\varepsilon,\eta} \left( \frac{K^2 B^{2-\frac{1}{r}}}{N d^2} \right) + O(\Delta(\alpha) N \log(KB)) \end{aligned}$$

□

*Suite de la démonstration du théorème 4.8.* On décompose  $T_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2, d, B)$  (4.28) en des parties  $T(\eta_{i-1}, \eta_i, d, B)$  où

$$T(\eta_{i-1}, \eta_i, d, B) = \left\{ (u, v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \left| \begin{array}{l} \eta_{i-1} B^{-\frac{1}{r}} < \left| \frac{u}{v} - \alpha \right| \leq \eta_i B^{-\frac{1}{r}} \\ \text{pgcd}(u, v) = 1 \\ v \leq \frac{B}{\alpha d} \end{array} \right. \right\}. \quad (4.47)$$

avec  $\varepsilon_2 = \eta_0 < \dots < \eta_l = \varepsilon_1$  choisies de sorte que

$$\eta_i - \eta_{i-1} < \alpha/4.$$

En appliquant la proposition 4.15 à ces ensembles (avec  $K = 1, \varepsilon = \eta_i, \eta = \eta_{i-1}$ ) on déduit que pour tout  $\sigma > 0$  et  $N > \max(4\varepsilon_1, 1)$ ,

$$\sharp T_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2, d, B) = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2\alpha^2 d^2} B^{2-\frac{1}{r}} + O_{\varepsilon_i} \left( \frac{B^{2-\frac{1}{r}}}{N d^2} \right) + O_\sigma \left( \frac{B^\sigma N}{d^\sigma} \right), \quad (4.48)$$

ce qui est valide aussi pour  $T_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2, d, B)$ . Il reste à sommer sur tous les  $d$ . Rappelons d'après (4.32) que l'on a pour tout  $\lambda > 0$ ,

$$d = O_{r, \alpha, \varepsilon_i} (B^{1-\frac{1}{(2+\lambda)r}}).$$

On choisit

$$\lambda = \frac{\sigma}{2} \left( 1 - \frac{1}{2r} \right) \text{ et } N = \frac{B^{(1-\frac{\sigma}{4})(1-\frac{1}{2r})}}{d^{1-\frac{\sigma}{2}}}.$$



On vérifie que avec ce choix

$$\left(1 - \frac{1}{(2+\lambda)r}\right) \left(1 - \frac{\sigma}{2}\right) < \left(1 - \frac{\sigma}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{2r}\right)$$

et donc

$$N \gg B^{(1-\frac{\sigma}{4})(1-\frac{1}{2r}) - (1-\frac{1}{(2+\lambda)r})(1-\frac{\sigma}{2})} \gg \varepsilon_1$$

pour  $B \gg_{\sigma, \varepsilon} 1$ . On réécrit (4.48) comme

$$\sharp T_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2, d, B) = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2\alpha^2 d^2} B^{2-\frac{1}{r}} + O_{\varepsilon_i, \sigma} \left( \frac{B^{1-\frac{1}{2r} + \sigma(\frac{3}{4} + \frac{1}{8r})}}{d^{1+\frac{\sigma}{2}}} \right).$$

En utilisant l'estimation élémentaire

$$\sum_{n=1}^M \frac{\mu(n)}{n^2} = \frac{6}{\pi^2} + O\left(\frac{1}{M}\right),$$

la somme du terme principal de (4.48) est égale à

$$\begin{aligned} \sum_{d=O(B^{1-\frac{1}{(2+\lambda)r}})} \mu(d) \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\alpha^2 d^2} B^{2-\frac{1}{r}} &= \frac{6(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{\pi^2 \alpha^2} B^{2-\frac{1}{r}} + O_{\varepsilon_i, \lambda}(B^{1-\frac{1+\lambda}{(2+\lambda)r}}) \\ &= \frac{6(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{\pi^2 \alpha^2} B^{2-\frac{1}{r}} + o_{\varepsilon_i, \lambda}(B^{1-\frac{1}{2r}}) \end{aligned}$$

Et celle du terme d'erreur est d'ordre de grandeur égal à

$$\sum_{d=O(B^{1-\frac{1}{(2+\lambda)r}})} O_{\varepsilon_i, \sigma} \left( \frac{B^{1-\frac{1}{2r} + \sigma(\frac{3}{4} + \frac{1}{8r})}}{d^{1+\frac{\sigma}{2}}} \right) = O_{\varepsilon_i, \sigma}(B^{1-\frac{1}{2r} + \sigma(\frac{3}{4} + \frac{1}{8r})}).$$

Finalement en reportant dans (4.28) on en conclut que

$$\sharp T(\varepsilon_1, \varepsilon_2, B) = \frac{6(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{\pi^2 \alpha^2} B^{2-\frac{1}{r}} + O_{\varepsilon_i, \sigma}(B^{1-\frac{1}{2r} + \sigma(\frac{3}{4} + \frac{1}{8r})}). \quad (4.49)$$

Il ne reste qu'à prendre, pour  $\tau > 0$  donné,  $\sigma > 0$  tel que  $\sigma(\frac{3}{4} + \frac{1}{8r}) \leq \tau$ . En reportant dans (4.27), cela démontre finalement que

$$\delta_{\mathbb{P}^1 \alpha, B, r}(\chi(\varepsilon_1, \varepsilon_2)) = \sharp S(\varepsilon_1, \varepsilon_2, B) = B^{2-\frac{1}{r}} \frac{3}{\pi^2 \alpha^2} \left( \int_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1} + \int_{-\varepsilon_1}^{-\varepsilon_2} \right) dx + O_{\varepsilon_i, \tau}(B^{1-\frac{1}{2r} + \tau}). \quad (4.50)$$

Maintenant, supposons la validité de (4.21). Rappelons la borne pour  $d$  (4.33). Dans ce cas on prend

$$N = \frac{(16\varepsilon_1^{\frac{3}{2}} + 2\varepsilon_1^{\frac{1}{2}})\Xi(\alpha)^{-\frac{1}{2}} B^{1-\frac{1}{2r}}}{d} > \max(4\varepsilon_1, 1).$$

Comme l'on suppose que  $0 < \Xi(\alpha) < 1$ , on déduit de (4.37)

$$\sharp T(\varepsilon_1, \varepsilon_2, d, B) = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\alpha^2 d^2} B^{2-\frac{1}{r}} + O_{\varepsilon_i} \left( \frac{\Delta(\alpha)\Xi(\alpha)^{-\frac{1}{2}}}{d} B^{1-\frac{1}{2r}} \log(B) \right).$$

On somme sur tous les  $d$  dans le terme principal et le terme d'erreur respectivement.

$$\begin{aligned} &\sum_{d \leq \varepsilon_1^{\frac{1}{2}} \Xi(\alpha)^{-\frac{1}{2}} B^{1-\frac{1}{2r}}} \mu(d) \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\alpha^2 d^2} B^{2-\frac{1}{r}} \\ &= \frac{6(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{\pi^2 \alpha^2} B^{2-\frac{1}{r}} + O_{\varepsilon_i}(\Xi(\alpha)^{\frac{1}{2}} B^{1-\frac{1}{2r}}), \\ &\sum_{d \leq \varepsilon_1^{\frac{1}{2}} \Xi(\alpha)^{-\frac{1}{2}} B^{1-\frac{1}{2r}}} O_{\varepsilon_i} \left( \frac{\Delta(\alpha)\Xi(\alpha)^{-\frac{1}{2}}}{d} B^{1-\frac{1}{2r}} \log(B) \right) \\ &= O_{\varepsilon_i} \left( \Delta(\alpha)\Xi(\alpha)^{-\frac{1}{2}} B^{1-\frac{1}{2r}} \log(B) \log(\Xi(\alpha)^{-\frac{1}{2}} B^{1-\frac{1}{2r}}) \right). \end{aligned}$$

On en conclut que

$$\begin{aligned}\#T(\varepsilon_1, \varepsilon_2, B) &= \frac{6(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{\pi^2 \alpha^2} B^{2-\frac{1}{r}} + O_{\varepsilon_i}(\Xi(\alpha)^{\frac{1}{2}} B^{1-\frac{1}{2r}}) + O_{\varepsilon_i}\left(\Delta(\alpha) \Xi(\alpha)^{-\frac{1}{2}} B^{1-\frac{1}{2r}} \log(B) \log(\Xi(\alpha)^{-\frac{1}{2}} B^{1-\frac{1}{2r}})\right) \\ &= \frac{6(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{\pi^2 \alpha^2} B^{2-\frac{1}{r}} + O_{\varepsilon_i}\left(\Delta(\alpha) \Xi(\alpha)^{-\frac{1}{2}} B^{1-\frac{1}{2r}} \log(B) \log(\Xi(\alpha)^{-\frac{1}{2}} B^{1-\frac{1}{2r}})\right).\end{aligned}$$

Cela démontre la formule (4.23).

Si  $0 < \alpha < 1$ , alors il suffit de modifier la définition de l'ensemble  $T(\varepsilon_1, \varepsilon_2, B)$  en remplaçant  $|v| \leq B/\alpha$  par  $|v| \leq B$ .

**Cas  $r > 1$ .** Une inversion de Möbius nous fournit que

$$\#S(\varepsilon_1, \varepsilon_2, B) = \sum_{d \leq B} \mu(d) (\#S(d, \varepsilon_1, B) - \#S(d, \varepsilon_2, B))$$

où

$$S(d, \varepsilon, B) = \left\{ (u, v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \left| \begin{array}{l} \left| \frac{u}{v} - \alpha \right| \leq \varepsilon B^{-\frac{1}{r}} \\ \sup(|u|, |v|) \leq B/d \end{array} \right. \right\}.$$

On a, par la méthode de comparaison classique avec l'aire du domaine réel,

$$\#S(d, \varepsilon, B) = B^{2-\frac{1}{r}} \frac{\varepsilon}{\sup(1, \alpha^2) d^2} + O_{|\alpha|} \left( \frac{B}{d} + \frac{\varepsilon B^{1-\frac{1}{r}}}{d} \right) = B^{2-\frac{1}{r}} \frac{\varepsilon}{\sup(1, \alpha^2) d^2} + O_{|\alpha|, \varepsilon} \left( \frac{B}{d} \right).$$

Puis on somme sur tous les  $d$  possible (4.32) et l'on obtient

$$\begin{aligned}\#S(\varepsilon_1, \varepsilon_2, B) &= \frac{6(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{\pi^2 \sup(1, \alpha^2)} B^{2-\frac{1}{r}} + O_{|\alpha|, \varepsilon_i}(B^{1-\frac{1}{r}}) + O_{|\alpha|, \varepsilon_i}(B \log B) \\ &= \frac{6(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{\pi^2 \sup(1, \alpha^2)} B^{2-\frac{1}{r}} + O_{|\alpha|, \varepsilon_i}(B \log B) \\ &= B^{2-\frac{1}{r}} \frac{3}{\pi^2 \sup(1, \alpha^2)} \left( \int_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1} + \int_{-\varepsilon_1}^{-\varepsilon_2} \right) dx + O_{|\alpha|, \varepsilon_i}(B \log B).\end{aligned}$$

□

### 4.3 Généralisation à un réseau

Les résultats sur l'approximation d'un nombre réel qu'on a démontrés précédemment peuvent être vu comme le fait d'approcher une droite par des points primitifs de pente donnée. Pour une utilisation ultérieure, nous allons présenter une version plus générales du Théorème 4.8. C'est-à-dire, on compte des points primitifs sur un réseau proche d'une droite dont la pente est un nombre quadratique donné. Le but est d'essayer de préciser la dépendance des constantes implicites, qui fait intervenir le déterminant du réseau. L'idée est qu'à l'aide d'une transformation linéaire liée au réseau, l'approximation sur le réseau de la droite équivaut l'approximation sur  $\mathbb{Z}^2$  d'une autre droite de pente égale à un autre nombre quadratique. Comme l'on a vu, l'un des inconvénients de la démonstration ci-dessus est que la constante  $C(\lambda, \alpha)$  qui apparaît dans (4.32) est en général difficile à préciser, à cause de l'absence d'effectivité du théorème de Roth (ou bien de l'inégalité de Liouville). Cela mène aussi à une ineffectivité de la discrétion, car dans la démonstration du Corollaire 4.12, on a utilisé le théorème de Roth (voir [16], p 123). Pour les nombres quadratiques, cette difficulté disparaît parce que l'on peut préciser facilement les constantes dans l'inégalité de Liouville (4.5) et dans la majoration de la discrétion. On remarque que la technique ci-dessous fonctionne aussi pour les réels dont les quotients partiels dans l'expansion en fraction continue sont bornés (ceux qui vérifient l'inégalité de Liouville à puissance 2). On ne rentrera pas dans les détails.

**Notations et Conventions :** On fixe un réseau  $\Lambda \subset \mathbb{Z}^2$  et  $\varepsilon, K > 0$ . On suppose que  $\Lambda$  contient un point primitif, donc  $\Lambda \not\subset (d\mathbb{Z})^2$  pour tout  $d \in \mathbb{N}^*$ . Les nombres quadratiques auxquels on s'intéresse sont de la forme  $\sqrt{\frac{b}{a}} \notin \mathbb{Q}$  avec  $a < b$ , que l'on notera toujours comme  $\alpha$ . En pratique, les constantes  $\varepsilon, \alpha$  sont bornées et l'on n'a pas besoin d'indiquer leur rôles dans les constante implicites. On note  $\Lambda_d = \Lambda \cap d\mathbb{Z}^2$ . et l'on définit

$$\Theta(\Lambda) = \sum_{d \in \mathbb{N}} \frac{\mu(d)}{\det(\Lambda_d)}. \quad (4.51)$$

Il existe  $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$  une base de  $\mathbb{Z}^2$  telle que  $\Lambda = \mathbb{Z}\mathbf{f}_1 \oplus \mathbb{Z}\det(\Lambda)\mathbf{f}_2$  puisque  $\Lambda$  contient un point primitif, donc

$$\begin{aligned}\Theta(\Lambda) &= \sum_{d \in \mathbb{N}} \frac{\mu(d)}{d[d, \det(\Lambda)]} \\ &= \prod_{p \nmid \det(\Lambda)} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) \prod_{p \mid \det(\Lambda)} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \frac{1}{p^{v_p(\det(\Lambda))}} \\ &= \frac{1}{\det(\Lambda)} \frac{6}{\pi^2} \prod_{p \mid \det(\Lambda)} \frac{1 - p^{-1}}{1 - p^{-2}} = \frac{6}{\pi^2} \frac{\Psi_1(\det(\Lambda))}{\det(\Lambda)}\end{aligned}\tag{4.52}$$

où

$$\Psi_1(n) = \prod_{p \mid n} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{-1}.\tag{4.53}$$

On voudrait estimer le cardinal de l'ensemble suivant

$$S(\varepsilon, K, \Lambda, B) = \left\{ (u, v) \in (\Lambda \cap \mathbb{N}^2)_{\text{prem}} \left| \begin{array}{l} 0 < \frac{u}{v} - \alpha \leq \varepsilon B^{-\frac{1}{r}} \\ v \leq KB \end{array} \right. \right\}.\tag{4.54}$$

Pour réduire la difficulté technique et pour obtenir une formule asymptotique, nous allons imposer plusieurs conditions techniques. On ne prétend pas que les coefficients dans (4.55) et (4.56) soient optimaux mais ils suffisent pour l'utilisation ultérieure.

$$\frac{1}{2} < r < \frac{7}{10},\tag{4.55}$$

$$K^2 b \leq U(\alpha, \varepsilon) B^{\frac{4}{5}(\frac{1}{r}-1) - \frac{3}{5}(2-\frac{1}{r})}, \quad U(\alpha, \varepsilon) = (2^{21} \times 162 \alpha^2 \varepsilon^2)^{-\frac{2}{5}}\tag{4.56}$$

$$b \det(\Lambda)^2 \leq K^2 B^{2-\frac{1}{r}}.\tag{4.57}$$

En gros, le but d'imposer la condition (4.56) est de réduire le problème de dénombrement à l'équidistribution modulo 1, et celui de la condition (4.57) est d'obtenir un meilleur terme d'erreur.

**Théorème 4.16.** *Avec les hypothèses ci-dessus, on a*

$$\sharp S(\varepsilon, K, \Lambda, B) = \frac{\Theta(\Lambda) \varepsilon K^2}{2} B^{2-\frac{1}{r}} + O(K^{\frac{3}{2}} b^{\frac{1}{4}} \det(\Lambda)^{\frac{1}{2}} B^{\frac{3}{4}(2-\frac{1}{r})} \log B + K b^{\frac{3}{2}} B^{1-\frac{1}{2r}} \log B).\tag{4.58}$$

Rappelons (4.51) que l'on peut aussi interpréter  $\Theta(\Lambda)$ , dans l'esprit de l'équidistribution, comme

$$\Theta(\Lambda) = \frac{1}{\sharp \mathbb{P}^1(\mathbb{Z}/\det(\Lambda)\mathbb{Z})} \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^2}\right),$$

qui correspond à la probabilité pour un point de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$  provenant d'un élément de  $\Lambda$  primitif dans  $\mathbb{Z}^2$ .

**Remarque 4.17.** Le deuxième terme d'erreur peut facilement dépasser le terme principal quand  $\det(\Lambda)$  est trop petit et  $b$  est trop grand, ce qui perd l'intérêt de la formule. Toutefois pour notre utilisation ultérieure il y aura des relations étroites entre  $b, K, \det(\Lambda)$ . Il s'avère qu'en fait ce sera le premier terme d'erreur qui contribuera plus que le deuxième.

L'idée de la démonstration est que les points que l'on veut dénombrer sont dans un triangle. Toute transformation définie par une matrice l'envoie sur un autre triangle dont l'aire est celle du triangle initial divisé par le déterminant et la pente de l'une des bords correspond à un nouveau nombre quadratique à approcher, que l'on notera  $\theta(\alpha)$ , ce qui nous permet de se ramener au cas traité précédemment et appliquer la même technique.

Commençons par quelques préparations. On prend un réseau  $\Gamma \subset \mathbb{Z}^2$ . On choisit une base

$$\mathbf{e}_1 = (\lambda_1, \mu_1), \quad \mathbf{e}_2 = (\lambda_2, \mu_2)\tag{4.59}$$

engendrant  $\Gamma$  telle que (cf. [9] p. 135)

$$\|\mathbf{e}_1\| \leq 2\nu_2, \quad \|\mathbf{e}_2\| \leq 2\nu_1,\tag{4.60}$$

où  $\nu_i$  désigne le  $i$ -ème minima successif de  $\Gamma$  par rapport à la norme symétrique et convexe  $\|\cdot\|$  :

$$\|(x, y)\| = \max(|x|, |y|).$$

Le théorème de Minkowski (cf. [9, Theorem V, VIII 4.3]) dit que

$$\nu_1^2 \leq \nu_1 \nu_2 \leq 4 \det(\Gamma) = 4|\lambda_2 \mu_1 - \lambda_1 \mu_2|. \quad (4.61)$$

On définit

$$\theta = \theta(\alpha) = -\frac{\lambda_1 - \alpha \mu_1}{\lambda_2 - \alpha \mu_2}. \quad (4.62)$$

Quitte à remplacer  $\mathbf{e}_i$  par son opposé, on peut supposer que

$$\lambda_2 - \alpha \mu_2 > 0 \quad \text{et} \quad \theta(\alpha) > 0. \quad (4.63)$$

On établit un théorème de Liouville « effectif », à savoir, avec des constantes explicites.

**Proposition 4.18.** *Pour tout  $(u, v) \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^2$ , on a*

$$\left| \frac{u}{v} - \alpha \right| \geq \frac{\Xi(\alpha)}{v^2} \quad \text{et} \quad \left| \frac{u}{v} - \theta \right| \geq \frac{\xi(\theta)}{v^2}, \quad (4.64)$$

où on peut prendre

$$\Xi(\alpha) = (4\sqrt{ab})^{-1}, \quad \xi(\theta) = (162b \det(\Gamma))^{-1}. \quad (4.65)$$

*Démonstration.* On va reprendre la démonstration de l'inégalité de Liouville respectivement pour  $\alpha$  et  $\theta$ . On note  $f(x) = ax^2 - b$  le polynôme minimal sur  $\mathbb{Z}$  du nombre quadratique  $\alpha = \sqrt{\frac{b}{a}}$ . Alors

$$g(x) = a(\lambda_1 + x\lambda_2)^2 - b(\mu_1 + x\mu_2)^2$$

est un polynôme entier qui annule  $\theta$ . D'une part comme  $\alpha \notin \mathbb{Q}$ , on a

$$\left| f\left(\frac{u}{v}\right) \right| \geq \frac{1}{v^2}, \quad \left| g\left(\frac{u}{v}\right) \right| \geq \frac{1}{v^2}. \quad (4.66)$$

D'autre part, d'après le théorème de valeur moyenne, pour  $z \in ]\alpha - 1, \alpha + 1[$  et  $y \in ]\theta - 1, \theta + 1[$ ,

$$|f(z)| \leq \sup_{|x-\alpha|<1} |f'(x)| |z - \alpha|, \quad |g(y)| \leq \sup_{|x-\theta|<1} |g'(x)| |y - \theta|. \quad (4.67)$$

Puisque

$$\sup_{|x-\alpha|<1} |f'(x)| = \sup_{|x-\alpha|<1} 2|ax| \leq 4\sqrt{ab}, \quad (4.68)$$

$$\begin{aligned} \sup_{|x-\theta|<1} |g'(x)| &= 2|(a\lambda_2^2 - b\mu_2^2)x + (a\lambda_1\lambda_2 - b\mu_1\mu_2)| \\ &\leq 2\sqrt{ab}|\lambda_2\mu_1 - \lambda_1\mu_2| + 2|a\lambda_2^2 - b\mu_2^2| + 4|a\lambda_1\lambda_2 - b\mu_1\mu_2|. \end{aligned}$$

D'après les théorèmes de Minkowski (4.61), en rappelant le choix de  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  (4.60) et  $b > a$ , il en découle que

$$|a\lambda_2^2 - b\mu_2^2| \leq b\|\mathbf{e}_2\|^2 \leq 16b \det(\Gamma),$$

$$|a\lambda_1\lambda_2 - b\mu_1\mu_2| \leq 2b\|\mathbf{e}_1\|\|\mathbf{e}_2\| \leq 32b \det(\Gamma), \quad (4.69)$$

d'où

$$\sup_{|x-\theta|<1} |g'(x)| \leq 162b \det(\Gamma). \quad (4.70)$$

Les inégalités (4.64) sont triviales si

$$\left| \frac{u}{v} - \alpha \right| \geq 1, \quad \text{ou} \quad \left| \frac{u}{v} - \theta \right| \geq 1.$$

Dans le cas contraire les inégalités (4.64) résultent de (4.66),(4.67),(4.68),(4.70).  $\square$

On en déduit l'encadrement suivant qui sera utilisé fréquemment.

**Corollaire 4.19.** *On a*

$$(16b\sqrt{\det(\Gamma)})^{-1} < \lambda_2 - \alpha\mu_2 < 8\alpha\sqrt{\det(\Gamma)}.$$

*Démonstration.* Premièrement,

$$\lambda_2 - \alpha\mu_2 < 2\alpha\|e_2\| \leq 8\alpha\sqrt{\det(\Gamma)}.$$

Pour la minoration on utilise les inégalités (4.64) :

$$\lambda_2 - \alpha\mu_2 > \frac{\Xi(\alpha)}{|\mu_2|} \geq \frac{\Xi(\alpha)}{\|e_2\|} > \frac{1}{16b\sqrt{\det(\Gamma)}}.$$

□

**Corollaire 4.20.** *Pour  $N > 1$ , on a*

$$ND_\alpha(N) = O\left(\frac{b}{\log b} \log N\right) = O(b \log N), \quad ND_\theta(N) = O\left(\frac{b \det(\Gamma)}{\log(b \det(\Gamma))} \log N\right) = O(b \det(\Gamma) \log N).$$

*Démonstration.* Ceci résulte du Lemme 4.14 et de la Proposition 4.18. □

*Démonstration du théorème 4.16.* Avant de commencer de dénombrer l'ensemble (4.54), on présente deux conditions supplémentaires qui sont des conséquences des conditions (4.55) et (4.56) pour  $B \gg_{\alpha, \varepsilon} 1$ ,

$$K^6 b^3 \leq (2^6 \varepsilon)^{-4} B^{4(\frac{1}{r}-1)-(2-\frac{1}{r})}, \quad (4.71)$$

$$K^2 b \leq (2^6 \alpha)^{-4} B^{4-3(2-\frac{1}{r})}, \quad (4.72)$$

puisque

$$0 < \frac{4}{5} \left( \frac{1}{r} - 1 \right) - \frac{3}{5} \left( 2 - \frac{1}{r} \right) < \min \left( \frac{4}{3} \left( \frac{1}{r} - 1 \right) - \frac{1}{3} \left( 2 - \frac{1}{r} \right), 4 - 3 \left( 2 - \frac{1}{r} \right) \right).$$

Premièrement, comme toujours, on utilise l'inversion de Möbius pour éliminer la coprimauté :

$$\sharp S(\varepsilon, K, \Lambda, B) = \sum_{d \in \mathbb{N}} \mu(d) \sharp S(\varepsilon, K, \Lambda_d, B),$$

où

$$S(\varepsilon, K, \Lambda_d, B) = \left\{ (u, v) \in \Lambda_d \cap \mathbb{N}^2 \left| \begin{array}{l} 0 < u - v\alpha \leq \varepsilon v B^{-\frac{1}{r}} \\ v \leq KB \end{array} \right. \right\}. \quad (4.73)$$

Pour déduire une borne précise pour  $d$  nous suivons (4.32). Pour tout  $(u, v) \in S(\varepsilon, K, \Lambda_d, B)$  (4.54), on note  $u' = u/d, v' = v/d$ . En utilisant la Proposition 4.18, on a

$$\frac{dC(\alpha)}{KB} \leq \frac{\Xi(\alpha)}{v'} \leq u' - v'\alpha < \varepsilon v' B^{-\frac{1}{r}} \leq \frac{\varepsilon K}{d} B^{1-\frac{1}{r}},$$

d'où

$$d \leq \left( \frac{\varepsilon K^2}{\Xi(\alpha)} \right)^{\frac{1}{2}} B^{1-\frac{1}{2r}} = D(\alpha, K) B^{1-\frac{1}{2r}}. \quad (4.74)$$

Notons que

$$D(\alpha, K) = \left( \frac{\varepsilon K^2}{\Xi(\alpha)} \right)^{\frac{1}{2}} \leq 2\sqrt{\varepsilon} K b^{\frac{1}{2}} \ll K b^{\frac{1}{2}}. \quad (4.75)$$

L'étape suivante consiste à éliminer la condition de réseau sur  $u, v$  pour les  $d$  petits. Pour contrôler la contribution des  $d$  grands on peut utiliser la majoration donnée par (4.37). On utilisera les notations (4.59), (4.60), (4.62) pour le réseau  $\Gamma = \Lambda_d$ , c'est-à-dire  $\Lambda_d = \mathbb{Z}e_1 \oplus \mathbb{Z}e_2$ . On écrit

$$u = n_1 \lambda_1 + n_2 \lambda_2, \quad v = n_1 \mu_1 + n_2 \mu_2,$$

avec  $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ . On voudrait se ramener au dénombrement sur  $(n_1, n_2)$  puisqu'il n'y a plus de contraintes sur la divisibilité de  $n_1, n_2$ . Avec les notations ci-dessus l'ensemble (4.73) s'écrit

$$S(\varepsilon, K, \Lambda_d, B) = \left\{ (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2 \left| \begin{array}{l} 0 < n_2 - n_1\theta \leq \frac{n_1\mu_1 + n_2\mu_2}{\lambda_2 - \alpha\mu_2} \varepsilon B^{-\frac{1}{r}} \\ 0 < n_1\mu_1 + n_2\mu_2 \leq KB \end{array} \right. \right\}.$$

**Cas I.  $d$  est petit.** On va estimer le cardinal de  $S(\varepsilon, K, \Lambda_d, B)$  quand  $d$  vérifie la condition

$$d \leq \frac{K^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{4}} \det(\Lambda)^{\frac{1}{2}}} B^{\frac{1}{4}(2-\frac{1}{r})}. \quad (4.76)$$

La condition (4.57) assure que tels  $d$  existent. D'abord on détermine le signe de  $n_1, n_2$ . En utilisant le corollaire 4.19 et en rappelant la condition (4.71), on a

$$\begin{aligned} 0 < n_2 - n_1\theta &\leq \frac{n_1\mu_1 + n_2\mu_2}{\lambda_2 - \alpha\mu_2} \varepsilon B^{-\frac{1}{r}} \leq \frac{K\varepsilon}{\lambda_2 - \alpha\mu_2} B^{1-\frac{1}{r}} \leq 16K\varepsilon b \sqrt{\det(\Lambda_d)} B^{1-\frac{1}{r}} \\ &\leq 16K\varepsilon b d \sqrt{\det(\Lambda)} B^{1-\frac{1}{r}} \leq 2^5 \varepsilon K^{\frac{3}{2}} b^{\frac{3}{4}} B^{1-\frac{1}{r}+\frac{1}{4}(2-\frac{1}{r})} \leq \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (4.77)$$

Cela implique non seulement que pour  $n_1$  fixé, il y a au plus un  $n_2$  tel que  $(n_1, n_2) \in S(\varepsilon, K, \Lambda_d, B)$ , mais aussi que, pour un réseau  $\Lambda_d$  fixé, on a  $n_1, n_2 \geq 0$  ou  $n_1, n_2 \leq 0$ . On ne peut avoir qu'une seule possibilité parce que le signe de  $n_1, n_2$  détermine aussi le signe de  $v$ , que l'on a supposé être positif. Donc dans la suite, sans perte de généralité on suppose que  $n_1, n_2$  sont positifs. En fait on a dans ce cas  $n_1, n_2 > 0$  (sinon on aurait  $n_1 = n_2 = 0$  et d'où  $v = 0$ ). On définit l'ensemble  $R(\varepsilon, K, \Lambda_d, B)$  des couples  $(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$  vérifiant

$$\begin{aligned} \frac{\det(\Lambda_d)n_1}{(\lambda_2 - \alpha\mu_2)^2} \varepsilon B^{-\frac{1}{r}} - 2^{10} K \varepsilon^2 b^2 \det(\Lambda_d)^{\frac{3}{2}} B^{1-\frac{2}{r}} &< n_2 - n_1\theta \leq \frac{\det(\Lambda_d)n_1}{(\lambda_2 - \alpha\mu_2)^2} \varepsilon B^{-\frac{1}{r}} + 2^{10} K \varepsilon^2 b^2 \det(\Lambda_d)^{\frac{3}{2}} B^{1-\frac{2}{r}} \\ n_1 &\leq 2 \frac{\lambda_2 - \alpha\mu_2}{\det(\Lambda_d)} KB \end{aligned} \quad (4.78)$$

et l'ensemble

$$T(\varepsilon, K, \Lambda_d, B) = \left\{ (n_1, n_2) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \left| \begin{array}{l} 0 < n_2 - n_1\theta \leq \frac{\det(\Lambda_d)n_1}{(\lambda_2 - \alpha\mu_2)^2} \varepsilon B^{-\frac{1}{r}} \\ n_1 \leq \frac{\lambda_2 - \alpha\mu_2}{\det(\Lambda_d)} KB \end{array} \right. \right\}. \quad (4.79)$$

**Lemme 4.21.** (Rappelons la notation  $\Delta$  (1.8).) On a  $S(\varepsilon, K, \Lambda_d, B) \Delta T(\varepsilon, K, \Lambda_d, B) \subseteq R(\varepsilon, K, \Lambda_d, B)$ .

*Démonstration.* Soit  $(n_1, n_2) \in S(\varepsilon, K, \Lambda_d, B)$ . On a

$$n_1|\mu_1 + \theta\mu_2| = |n_1\mu_1 + n_2\mu_2 - (n_2 - n_1\theta)\mu_2| \leq KB + |\mu_2|(n_2 - n_1\theta),$$

D'après (4.77) et le corollaire 4.19, on a

$$\frac{|\mu_2|(n_2 - n_1\theta)}{|\mu_1 + \theta\mu_2|} = \frac{|\mu_2|(n_2 - n_1\theta)(\lambda_2 - \alpha\mu_2)}{\det(\Lambda_d)} \leq 32\alpha(n_2 - n_1\theta) \leq \frac{\alpha}{2}.$$

Notons aussi que, d'après le corollaire 4.19, (4.72), et (4.76),

$$\frac{\lambda_2 - \alpha\mu_2}{\det(\Lambda_d)} KB > \frac{KB}{16b \det(\Lambda_d)^{\frac{3}{2}}} \geq \frac{KB}{16b \det(\Lambda)^{\frac{3}{2}} d^3} \geq \frac{B^{1-\frac{3}{4}(2-\frac{1}{r})}}{2^7 K^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{4}}} \geq \frac{\alpha}{2}.$$

Donc

$$n_1 \leq \frac{KB + |\mu_2|(n_2 - n_1\theta)}{|\mu_1 + \theta\mu_2|} \leq \frac{\lambda_2 - \alpha\mu_2}{\det(\Lambda_d)} KB + \frac{\alpha}{2} \leq 2 \frac{\lambda_2 - \alpha\mu_2}{\det(\Lambda_d)} KB.$$

Deuxièmement,

$$\frac{n_1\mu_1 + n_2\mu_2}{\lambda_2 - \alpha\mu_2} = \frac{n_1(\lambda_2\mu_1 - \lambda_1\mu_2)}{(\lambda_2 - \alpha\mu_2)^2} + \frac{\mu_2(n_2 - \theta n_1)}{\lambda_2 - \alpha\mu_2}.$$

On va montrer que pour tout  $(n_1, n_2) \in S(\varepsilon, K, \Lambda_d, B) \cup T(\varepsilon, K, \Lambda_d, B)$ ,

$$\left| \frac{(\lambda_2 \mu_1 - \lambda_1 \mu_2) n_1}{(\lambda_2 - \alpha \mu_2)^2} \right| \varepsilon B^{-\frac{1}{r}} \geq 2^{11} K \varepsilon^2 b^2 \det(\Lambda_d)^{\frac{3}{2}} B^{1-\frac{2}{r}} \geq 2 \left| \frac{\mu_2(n_2 - n_1 \theta)}{\lambda_2 - \alpha \mu_2} \right| \varepsilon B^{-\frac{1}{r}}. \quad (4.80)$$

En particulier, comme on a  $\det(\Lambda_d) = \lambda_2 \mu_1 - \lambda_1 \mu_2$ , cela implique que

$$\left| \frac{\det(\Lambda_d) n_1}{(\lambda_2 - \alpha \mu_2)^2} \varepsilon B^{-\frac{1}{r}} - \frac{n_1 \mu_1 + n_2 \mu_2}{\lambda_2 - \alpha \mu_2} \varepsilon B^{-\frac{1}{r}} \right| = \left| \frac{\mu_2(n_2 - \theta n_1)}{\lambda_2 - \alpha \mu_2} \varepsilon B^{-\frac{1}{r}} \right| \leq 2^{10} K \varepsilon^2 b^2 \det(\Lambda_d)^{\frac{3}{2}} B^{1-\frac{2}{r}},$$

et donc le lemme. Si  $(n_1, n_2) \in S(\varepsilon, K, \Lambda_d, B)$ , d'après l'estimation (4.77) et la proposition 4.18,

$$\frac{\xi(\theta)}{n_1} \leq n_2 - n_1 \theta \leq 16 K \varepsilon b \sqrt{\det(\Lambda_d)} B^{1-\frac{1}{r}}.$$

Pour  $(n_1, n_2) \in T(\varepsilon, K, \Lambda_d, B)$ , on déduit directement du corollaire 4.19 que

$$n_2 - n_1 \theta \leq \frac{K \varepsilon}{\lambda_2 - \alpha \mu_2} B^{1-\frac{1}{r}} \leq 16 K \varepsilon b \sqrt{\det(\Lambda_d)} B^{1-\frac{1}{r}}.$$

On en conclut

$$n_1 \geq \frac{B^{\frac{1}{r}-1} \xi(\theta)}{16 K \varepsilon b \sqrt{\det(\Lambda_d)}} = \frac{B^{\frac{1}{r}-1}}{16 \times 162 K \varepsilon b^2 \det(\Lambda_d)^{\frac{3}{2}}}, \quad (4.81)$$

et

$$\begin{aligned} \left| \frac{\mu_2(n_2 - n_1 \theta)}{\lambda_2 - \alpha \mu_2} \right| \varepsilon B^{-\frac{1}{r}} &\leq (\Xi(\alpha))^{-1} \mu_2^2(n_2 - n_1 \theta) \varepsilon B^{-\frac{1}{r}} \\ &\leq 2^{10} \varepsilon^2 K b^2 \det(\Lambda_d)^{\frac{3}{2}} B^{1-\frac{2}{r}}. \end{aligned}$$

Pour que (4.80) soit vraie, il suffit que

$$\frac{\det(\Lambda_d) n_1}{(\lambda_2 - \alpha \mu_2)^2} \varepsilon B^{-\frac{1}{r}} \geq 2^{11} K \varepsilon^2 b^2 \det(\Lambda_d)^{\frac{3}{2}} B^{1-\frac{2}{r}}.$$

Il suffit donc que

$$n_1 \geq 2^{17} \alpha^2 \varepsilon K b^2 \det(\Lambda_d)^{\frac{3}{2}} B^{1-\frac{1}{r}} \geq 2^{11} \varepsilon (\lambda_2 - \mu_2 \alpha)^2 K b^2 \det(\Lambda_d)^{\frac{1}{2}} B^{1-\frac{1}{r}}. \quad (4.82)$$

D'après la condition (4.56) et la condition sur  $d$  (4.76), on a

$$\begin{aligned} 2^{21} \times 162 \alpha^2 \varepsilon^2 K^2 b^4 \det(\Lambda_d)^3 &\leq 2^{21} \times 162 \alpha^2 \varepsilon^2 K^2 b^4 \det(\Lambda)^3 d^6 \\ &\leq 2^{21} \times 162 \alpha^2 \varepsilon^2 K^5 b^{\frac{5}{2}} B^{\frac{3}{2}(2-\frac{1}{r})} \\ &\leq B^{2(\frac{1}{r}-1)}, \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\frac{B^{\frac{1}{r}-1}}{16 \times 162 K \varepsilon b^2 \det(\Lambda_d)^{\frac{3}{2}}} \geq 2^{17} \alpha^2 \varepsilon K b^2 \det(\Lambda_d)^{\frac{3}{2}} B^{1-\frac{1}{r}}.$$

Donc l'inégalité (4.82) qui fallait démontrer découle de (4.81).  $\square$

Maintenant on découpe l'intervalle

$$\left[ 1, \frac{(\lambda_2 - \alpha \mu_2) K}{\det(\Lambda_d)} B \right]$$

en  $N$  pièces (avec  $N$  à déterminer)

$$\left[ \frac{(\lambda_2 - \alpha \mu_2)(k-1)K}{N \det(\Lambda_d)} B, \frac{(\lambda_2 - \alpha \mu_2)kK}{N \det(\Lambda_d)} B \right], \quad 1 \leq k \leq N. \quad (4.83)$$

On applique le Théorème 4.11.

$$\begin{aligned}
\sharp T(\varepsilon, K, \Lambda_d, b) &= \sum_{1 \leq k \leq N} \sum_{\frac{(\lambda_2 - \alpha\mu_2)(k-1)K}{N \det(\Lambda_d)} B < n \leq \frac{(\lambda_2 - \alpha\mu_2)kK}{N \det(\Lambda_d)} B} 1_{1 - \{n\theta\} \leq \frac{\det(\Lambda_d)n}{(\lambda_2 - \alpha\mu_2)^2} \varepsilon B^{-\frac{1}{r}}} \\
&= \sum_{1 \leq k \leq N} \sum_{\frac{(\lambda_2 - \alpha\mu_2)(k-1)K}{N \det(\Lambda_d)} B < n \leq \frac{(\lambda_2 - \alpha\mu_2)kK}{N \det(\Lambda_d)} B} \left( 1_{1 - \{n\theta\} \leq \frac{k\varepsilon K}{N(\lambda_2 - \mu_2\alpha)} B^{1 - \frac{1}{r}}} - 1_{\frac{\det(\Lambda_d)n}{(\lambda_2 - \alpha\mu_2)^2} \varepsilon B^{-\frac{1}{r}} < 1 - \{n\theta\} \leq \frac{k\varepsilon K}{N(\lambda_2 - \mu_2\alpha)} B^{1 - \frac{1}{r}}} \right) \\
&= \sum_{1 \leq k \leq N} \left( \sum_{n \leq \frac{(\lambda_2 - \alpha\mu_2)kK}{N \det(\Lambda_d)} B} - \sum_{n \leq \frac{(\lambda_2 - \alpha\mu_2)(k-1)K}{N \det(\Lambda_d)} B} \right) 1_{1 - \{n\theta\} \leq \frac{k\varepsilon K}{N(\lambda_2 - \mu_2\alpha)} B^{1 - \frac{1}{r}}} - \sum_{1 \leq k \leq N} \text{Er}_k.
\end{aligned}$$

Pour  $1 \leq k \leq N$ , on définit

$$\phi_k(u) = 1_{1 - \frac{k\varepsilon K}{N(\lambda_2 - \mu_2\alpha)} B^{1 - \frac{1}{r}} \leq u < 1}(u),$$

on a

$$\int_0^1 \phi_k(u) \, du = \frac{k\varepsilon K}{N(\lambda_2 - \mu_2\alpha)} B^{1 - \frac{1}{r}}.$$

Donc d'après le théorème 4.11 avec le terme d'erreur précis (corollaire 4.20),

$$\begin{aligned}
&\sum_{n \leq \frac{(\lambda_2 - \alpha\mu_2)kK}{N \det(\Lambda_d)} B} 1_{1 - \{n\theta\} \leq \frac{k\varepsilon K}{N(\lambda_2 - \mu_2\alpha)} B^{1 - \frac{1}{r}}} \\
&= \frac{k^2 \varepsilon K^2}{N^2 \det(\Lambda_d)} B^{2 - \frac{1}{r}} + O \left( V(\phi) b \det(\Lambda_d) \log \left( \frac{kK(\lambda_2 - \alpha\mu_2)}{N \det(\Lambda_d)} B \right) \right) \\
&= \frac{k^2 \varepsilon K^2}{N^2 \det(\Lambda_d)} B^{2 - \frac{1}{r}} + O \left( b \det(\Lambda_d) \log \left( \frac{kK(\lambda_2 - \alpha\mu_2)}{N \det(\Lambda_d)} B \right) \right), \\
&\sum_{n \leq \frac{(\lambda_2 - \alpha\mu_2)(k-1)K}{N \det(\Lambda_d)} B} 1_{1 - \{n\theta\} \leq \frac{k\varepsilon K}{N(\lambda_2 - \mu_2\alpha)} B^{1 - \frac{1}{r}}} \\
&= \frac{k(k-1) \varepsilon K^2}{N^2 \det(\Lambda_d)} B^{2 - \frac{1}{r}} + O \left( b \det(\Lambda_d) \log \left( \frac{(k-1)K(\lambda_2 - \alpha\mu_2)}{N \det(\Lambda_d)} B \right) \right).
\end{aligned} \tag{4.84}$$

Donc

$$\begin{aligned}
&\sum_{\frac{(\lambda_2 - \alpha\mu_2)(k-1)K}{N \det(\Lambda_d)} B < n \leq \frac{(\lambda_2 - \alpha\mu_2)kK}{N \det(\Lambda_d)} B} 1_{1 - \{n\theta\} \leq \frac{k\varepsilon K}{N(\lambda_2 - \mu_2\alpha)} B^{1 - \frac{1}{r}}} \\
&= \frac{k\varepsilon K^2}{N^2 \det(\Lambda_d)} B^{2 - \frac{1}{r}} + O \left( b \det(\Lambda_d) \log \left( \frac{kK(\lambda_2 - \alpha\mu_2)}{N \det(\Lambda_d)} B \right) \right)
\end{aligned}$$

On calcule maintenant le terme d'erreur provenant du changement de  $n_1$  en les valeurs du bord des intervalles (4.83). En appliquant le théorème 4.11 à la fonction auxiliaire

$$1_{1 - \frac{k\varepsilon K}{N(\lambda_2 - \mu_2\alpha)} B^{1 - \frac{1}{r}} \leq u \leq 1 - \frac{(k-1)\varepsilon K}{N(\lambda_2 - \mu_2\alpha)} B^{1 - \frac{1}{r}}},$$

on obtient

$$\begin{aligned}
\text{Er}_k &= \sum_{\frac{(\lambda_2 - \alpha\mu_2)(k-1)K}{N \det(\Lambda_d)} B < n \leq \frac{(\lambda_2 - \alpha\mu_2)kK}{N \det(\Lambda_d)} B} 1_{\frac{\det(\Lambda_d)n}{(\lambda_2 - \alpha\mu_2)^2} \varepsilon B^{-\frac{1}{r}} < 1 - \{n\theta\} \leq \frac{k\varepsilon K}{N(\lambda_2 - \mu_2\alpha)} B^{1 - \frac{1}{r}}} \\
&\leq \sum_{\frac{(\lambda_2 - \alpha\mu_2)(k-1)K}{N \det(\Lambda_d)} B < n \leq \frac{(\lambda_2 - \alpha\mu_2)kK}{N \det(\Lambda_d)} B} 1_{\frac{(k-1)\varepsilon K}{N(\lambda_2 - \mu_2\alpha)} B^{1 - \frac{1}{r}} < 1 - \{n\theta\} \leq \frac{k\varepsilon K}{N(\lambda_2 - \mu_2\alpha)} B^{1 - \frac{1}{r}}} \\
&= \left( \sum_{n \leq \frac{(\lambda_2 - \alpha\mu_2)kK}{N \det(\Lambda_d)} B} - \sum_{n \leq \frac{(\lambda_2 - \alpha\mu_2)(k-1)K}{N \det(\Lambda_d)} B} \right) 1_{\frac{(k-1)\varepsilon K}{N(\lambda_2 - \mu_2\alpha)} B^{1 - \frac{1}{r}} < 1 - \{n\theta\} \leq \frac{k\varepsilon K}{N(\lambda_2 - \mu_2\alpha)} B^{1 - \frac{1}{r}}} \\
&= \frac{\varepsilon K^2}{N^2 \det(\Lambda_d)} B^{2 - \frac{1}{r}} + O \left( b \det(\Lambda_d) \log \left( \frac{kK(\lambda_2 - \alpha\mu_2)}{N \det(\Lambda_d)} B \right) \right),
\end{aligned}$$



On en conclut que

$$\begin{aligned} \sharp T(\varepsilon, K, \Lambda_d, b) \\ = \sum_{1 \leq k \leq N} \left( \frac{k\varepsilon K^2}{N^2 \det(\Lambda_d)} B^{2-\frac{1}{r}} + O \left( \frac{K^2}{N^2 \det(\Lambda_d)} B^{2-\frac{1}{r}} \right) + O \left( b \det(\Lambda_d) \log \left( \frac{kK(\lambda_2 - \alpha\mu_2)}{N \det(\Lambda_d)} B \right) \right) \right). \end{aligned}$$

Grâce à la condition (4.56),

$$\log(KB) \leq \log(Kb^{\frac{1}{2}}B) \ll \log B.$$

En sommant sur tous les  $k$  pour le premier terme (le terme principal)

$$\sum_{k=1}^N \frac{k\varepsilon K^2}{N^2 \det(\Lambda_d)} B^{2-\frac{1}{r}} = \frac{\varepsilon K^2}{2 \det(\Lambda_d)} B^{2-\frac{1}{r}} + O \left( \frac{K^2}{N \det(\Lambda_d)} B^{2-\frac{1}{r}} \right),$$

puis sur les termes d'erreur

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^N \frac{K^2}{N^2 \det(\Lambda_d)} B^{2-\frac{1}{r}} + b \det(\Lambda_d) \log \left( \frac{kK(\lambda_2 - \alpha\mu_2)}{N \det(\Lambda_d)} B \right) \\ & \ll \frac{K^2}{N \det(\Lambda_d)} B^{2-\frac{1}{r}} + b \det(\Lambda_d) \sum_{1 \leq k \leq N} \log \left( \frac{kKB}{N} \right) \\ & \ll \frac{K^2}{N \det(\Lambda_d)} B^{2-\frac{1}{r}} + b \det(\Lambda_d) N \log(KB) \\ & \ll \frac{K^2}{N \det(\Lambda_d)} B^{2-\frac{1}{r}} + b \det(\Lambda_d) N \log(B) \end{aligned}$$

On obtient que

$$\sharp T(\varepsilon, K, \Lambda_d, b) = \frac{\varepsilon K^2}{2 \det(\Lambda_d)} B^{2-\frac{1}{r}} + O \left( \frac{K^2}{N \det(\Lambda_d)} B^{2-\frac{1}{r}} + b \det(\Lambda_d) N \log(B) \right).$$

Il nous reste à majorer le terme d'erreur venant du cardinal de  $R(\varepsilon, K, \Lambda_d, B)$  (4.78).

$$\begin{aligned} \sharp R(\varepsilon, K, \Lambda_d, B) \\ = \sum_{n \leq 2 \frac{\lambda_2 - \mu_2 \alpha}{\det(\Lambda_d)} KB} \frac{1}{\frac{\det(\Lambda_d)n}{(\lambda_2 - \alpha\mu_2)^2} \varepsilon B^{-\frac{1}{r}} - 2^{10} K \varepsilon^2 b^2 \det(\Lambda_d)^{\frac{3}{2}} B^{1-\frac{2}{r}} < 1 - \{n\theta\} \leq \frac{\det(\Lambda_d)n}{(\lambda_2 - \alpha\mu_2)^2} \varepsilon B^{-\frac{1}{r}} + 2^{10} K \varepsilon^2 b^2 \det(\Lambda_d)^{\frac{3}{2}} B^{1-\frac{2}{r}}} \\ = O \left( K \varepsilon^2 b^2 \det(\Lambda_d)^{\frac{3}{2}} B^{1-\frac{2}{r}} \times \frac{\lambda_2 - \mu_2 \alpha}{\det(\Lambda_d)} KB + b \det(\Lambda_d) \log \left( \frac{\lambda_2 - \mu_2 \alpha}{\det(\Lambda_d)} KB \right) \right) \\ = O(K^2 b^2 \det(\Lambda_d) B^{2-\frac{2}{r}} + b \det(\Lambda_d) \log(KB)) \\ = O(b \det(\Lambda_d) \log(B)). \end{aligned}$$

grâce à la condition (4.56). On en conclut que

$$S(\varepsilon, K, \Lambda_d, B) = \frac{\varepsilon K^2}{2 \det(\Lambda_d)} B^{2-\frac{1}{r}} + O \left( \frac{K^2}{N \det(\Lambda_d)} B^{2-\frac{1}{r}} + b \det(\Lambda_d) N \log(B) \right)$$

On choisit

$$N = \frac{2KB^{1-\frac{1}{2r}}}{b^{\frac{1}{2}} \det(\Lambda_d)}.$$

Comme  $\det(\Lambda_d) \leq d^2 \det(\Lambda)$ , la condition (4.76) assure que  $N > 1$ . On conclut que

$$S(\varepsilon, K, \Lambda_d, B) = \frac{\varepsilon K^2}{2 \det(\Lambda_d)} B^{2-\frac{1}{r}} + O(Kb^{\frac{1}{2}}B^{1-\frac{1}{2r}} \log(B)).$$

Maintenant on somme sur tous les  $d$  petits (4.76). D'abord faisons-le pour le terme principal. En rappelant la constante  $\Theta(\Lambda)$  (4.51) et en remarquant que  $\det(\Lambda_d) \geq d^2$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq d \leq K^{\frac{1}{2}} b^{-\frac{1}{4}} \det(\Lambda)^{-\frac{1}{2}} B^{\frac{1}{4}(2-\frac{1}{r})}} \mu(d) \frac{\varepsilon K^2}{2 \det(\Lambda_d)} B^{2-\frac{1}{r}} &= \frac{\Theta(\Lambda) \varepsilon K^2}{2} B^{2-\frac{1}{r}} + \sum_{d > K^{\frac{1}{2}} b^{-\frac{1}{4}} \det(\Lambda)^{-\frac{1}{2}} B^{\frac{1}{4}(2-\frac{1}{r})}} O \left( \frac{K^2}{d^2} B^{2-\frac{1}{r}} \right) \\ &= \frac{\Theta(\Lambda) \varepsilon K^2}{2} B^{2-\frac{1}{r}} + O \left( K^{\frac{3}{2}} b^{\frac{1}{4}} \det(\Lambda)^{\frac{1}{2}} B^{\frac{3}{4}(2-\frac{1}{r})} \right). \end{aligned} \tag{4.85}$$

Ensuite pour le terme d'erreur

$$\sum_{1 \leq d \leq K^{\frac{1}{2}} b^{-\frac{1}{4}} \det(\Lambda)^{-\frac{1}{2}} B^{\frac{1}{4}(2-\frac{1}{r})}} K b^{\frac{1}{2}} B^{1-\frac{1}{2r}} \log(B) = O\left(\frac{K^{\frac{3}{2}} b^{\frac{1}{4}}}{\det(\Lambda)^{\frac{1}{2}}} B^{\frac{3}{4}(2-\frac{1}{r})} \log B\right). \quad (4.86)$$

**Cas II.  $d$  est grand.** Pour les  $d$  vérifiant

$$\frac{K^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{4}} \det(\Lambda)^{\frac{1}{2}}} B^{\frac{1}{4}(2-\frac{1}{r})} < d \leq D(\alpha, K) B^{1-\frac{1}{2r}},$$

on utilise la formule (4.37) de la proposition 4.15 avec  $N = 1 + \frac{4\varepsilon K}{\alpha d}$ , notant que la condition (4.56) implique l'hypothèse (4.34) de la proposition. On obtient

$$\begin{aligned} \sharp S(\varepsilon, K, \Lambda_d, B) &\leq \sharp \left\{ (u, v) \in \mathbb{N}^2 \left| \begin{array}{l} 0 < \frac{u}{v} - \alpha \leq \varepsilon B^{-\frac{1}{r}} \\ v \leq \frac{KB}{d} \end{array} \right. \right\} \\ &= O\left(\frac{K^2}{d^2} B^{2-\frac{1}{r}} + \Delta(\alpha) \left(1 + \frac{K}{d}\right) \log(KB)\right) \\ &= O\left(\frac{K^2}{d^2} B^{2-\frac{1}{r}} + b \left(1 + \frac{K}{d}\right) \log B\right). \end{aligned}$$

Donc la contribution totale provenant de ces  $d$  est d'ordre de grandeur

$$\begin{aligned} &\sum_{K^{\frac{1}{2}} b^{-\frac{1}{4}} \det(\Lambda)^{-\frac{1}{2}} B^{\frac{1}{4}(2-\frac{1}{r})} < d \leq D(\alpha, K) B^{1-\frac{1}{2r}}} O\left(\frac{K^2}{d^2} B^{2-\frac{1}{r}} + b \left(1 + \frac{K}{d}\right) \log B\right) \\ &= O(K^{\frac{3}{2}} b^{\frac{1}{4}} \det(\Lambda)^{\frac{1}{2}} B^{\frac{3}{4}(2-\frac{1}{r})} + b D(\alpha, K) B^{1-\frac{1}{2r}} \log B + K b \log(D(\alpha, K) B^{1-\frac{1}{2r}}) \log B) \\ &= O(K^{\frac{3}{2}} b^{\frac{1}{4}} \det(\Lambda)^{\frac{1}{2}} B^{\frac{3}{4}(2-\frac{1}{r})} + K b^{\frac{3}{2}} B^{1-\frac{1}{2r}} \log B + K b (\log B)^2) \\ &= O(K^{\frac{3}{2}} b^{\frac{1}{4}} \det(\Lambda)^{\frac{1}{2}} B^{\frac{3}{4}(2-\frac{1}{r})} + K b^{\frac{3}{2}} B^{1-\frac{1}{2r}} \log B) \end{aligned} \quad (4.87)$$

La formule (4.58) est déduite de (4.85) (4.86) et (4.87). □

## 4.4 Perspective

Le théorème 1.3 ne couvre pas le zoom critique des nombres algébriques de degré plus grand que 2. Les experts semblent penser que l'expansion en fraction continue d'un nombre algébrique  $\alpha$  de degré  $\geq 3$  n'a pas de quotients partiels bornés. C'est-à-dire que pour tout réel  $C > 0$ , il existe toujours des nombres rationnels  $\frac{p}{q}$  vérifiant

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{C}{q^2}.$$

En terme de la distribution locale (critique), on pourrait interpréter cela comme : les nombres rationnels proches de  $\alpha$  seraient « beaucoup plus nombreux » que dans le cas quadratique et on n'aurait plus de phénomène de « trou ».

## 5 Distribution locale sur la surface torique $Y_4$

La surface  $Y_4$  est une surface torique qui n'est pas de Fano. Elle est construite comme l'éclatement des 4 points invariants de  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ . Elle peut être aussi obtenue en éclatant plus de points invariants sous l'action du tore sur la surface torique  $X_3$ , qui est une surface de del Pezzo torique de degré 6 étudiée dans [14]. Dans la suite on prend le premier point de vue.

### 5.1 Géométrie de $Y_4$ et courbes rationnelles sur $Y_4$

On considère la surface torique  $Y_4$  obtenue en éclatant  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  en 4 points invariants  $[1 : 0] \times [1 : 0], [0 : 1] \times [1 : 0], [1 : 0] \times [0 : 1], [0 : 1] \times [0 : 1]$ . L'éventail de  $V$  est le suivant.

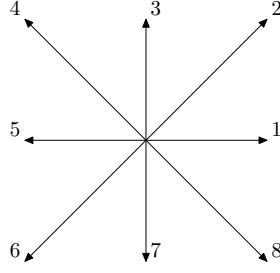


FIGURE 2 – L'éventail de  $T_4$

On note  $\mathcal{O}(1,0), \mathcal{O}(0,1)$  les tirés en arrière de sections hyperplans dans chaque  $\mathbb{P}^1$ , et  $E_i$  ( $1 \leq i \leq 4$ ) les images inverses des points éclatés. En dehors des points éclatés on utilise encore les coordonnées  $[x : y] \times [s : t]$  de  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ . Les générateurs  $\{\rho_i\}_{i=1}^8$  des raies de l'éventail de  $Y_4$  vérifient les relations

$$\rho_i + \rho_{i+4} = 0 \quad (1 \leq i \leq 4).$$

Ce sont toutes les *collections primitives* ([1] Definition 2.6, 2.7, Proposition 3.2) minimales centrées pour  $Y_4$ . Pour les variétés toriques lisses complète, les collection primitives minimales centrées représentent les courbes rationnelles de degré anticanonique minimal. Dans notre cas ils correspondent à 4 courbes rationnelles de degré lisses 2 relativement au fibré anticanonique passant par  $Q = [1 : 1] \times [1 : 1]$ , que l'on appellera les courbes spéciales et l'on notera  $Z_i$  ( $1 \leq i \leq 4$ ) d'équations respectives

$$x = y, \quad s = t, \quad xs = yt, \quad \text{et} \quad xt = ys. \quad (5.1)$$

Elles appartiennent, respectivement, aux classes de

$$\mathcal{O}(1,0), \quad \mathcal{O}(0,1), \quad \mathcal{O}(1,1) - E_2 - E_3, \quad \mathcal{O}(1,1) - E_1 - E_4$$

dans le groupe de Picard. Pour chacun de ces fibrés il existe un unique diviseur irréductible passant par  $Q$ . Il y a 4 familles de courbes rationnelles de degré 3 relativement au fibré anticanonique passant par  $Q$  qui sont lisses, dont les classes sont

$$\mathcal{O}(1,1) - E_i, \quad (1 \leq i \leq 4).$$

Le diviseur anticanonique

$$\omega_{Y_4}^{-1} = \mathcal{O}(2,2) - E_1 - E_2 - E_3 - E_4,$$

dont les sections globales sont des combinaisons linéaires des monômes

$$x^2st, \quad y^2st, \quad t^2xy, \quad s^2xy, \quad xyst,$$

est engendré par ses sections globales mais il n'est pas ample. Sur l'ouvert  $(s \neq 0) \cap (x \neq 0)$ , en utilisant les coordonnées  $(w, z) = (\frac{y}{x}, \frac{t}{s})$ , on identifie localement l'espace tangent de  $Q$  à  $\mathbb{A}^2$  par le difféomorphisme

$$\varrho : [x : y] \times [s : t] \mapsto \left( \frac{y}{x} - 1, \frac{t}{s} - 1 \right) = (w - 1, z - 1). \quad (5.2)$$

Avec cette identification, les 4 courbes spéciales s'écrivent comme 3 droites et une hyperbole de degré anticanonique 2 :

$$z = 1, \quad w = 1, \quad z = w, \quad zw = 1.$$

Maintenant on associe une hauteur de Weil à  $\omega_{Y_4}^{-1}$ . Tout d'abord pour un point  $P = [x : y] \times [s : t]$  avec

$$\text{pgcd}(x, y) = \text{pgcd}(s, t) = 1$$

n'appartenant pas aux diviseurs exceptionnels,

$$\begin{aligned} & \text{pgcd}(x^2st, y^2st, t^2xy, s^2xy, xyst) \\ &= \text{pgcd}(st \text{pgcd}(x^2, y^2), xy \text{pgcd}(t^2, s^2), xyst) \\ &= \text{pgcd}(st, xy, xyst) \\ &= \text{pgcd}(x, s) \text{pgcd}(x, t) \text{pgcd}(y, s) \text{pgcd}(y, t). \end{aligned}$$

Donc on peut prendre comme hauteur de Weil

$$H_{\omega_{Y_4}^{-1}}(P) = \frac{\max(|x^2 st|, |y^2 st|, |t^2 xy|, |s^2 xy|, |xyst|)}{\text{pgcd}(x^2 st, y^2 st, t^2 xy, s^2 xy, xyst)} = \frac{\max(|x^2 st|, |y^2 st|, |t^2 xy|, |s^2 xy|)}{\text{pgcd}(x, s) \text{pgcd}(x, t) \text{pgcd}(y, s) \text{pgcd}(y, t)}.$$

Par symétrie on peut se ramener à la région

$$R = \{(w, z) : z > w > 1\}. \quad (5.3)$$

On note

$$V = \varrho^{-1}(R) \subset U = Y_4 \setminus \cup_{i=1}^4 Z_i. \quad (5.4)$$

Pour  $P = [x : y] \times [s : t] \in V$ , la hauteur se calcule comme

$$H_{\omega_{Y_4}^{-1}}(P) = \frac{t^2 xy}{\text{pgcd}(x, s) \text{pgcd}(x, t) \text{pgcd}(y, s) \text{pgcd}(y, t)}.$$

La distance que l'on va utiliser est

$$d(P) = d(\varrho(P), \varrho(Q)) = \max(|z - 1|, |w - 1|) = z - 1.$$

## 5.2 Détermination des constantes d'approximation

### 5.2.1 Borne inférieure uniforme

Nous allons montrer que la meilleure constante d'approximation est 2 par une estimation directe.

**Proposition 5.1.**

$$\alpha(Q, Y_4) = 2.$$

*Démonstration.* Pour  $P = [x : y] \times [s : t] \neq Q$  satisfaisant à  $t \neq s$  (les cas où  $x \neq y$  se démontre de façon analogue), on a

$$\begin{aligned} H_{\omega_{Y_4}^{-1}}(P) d(P)^2 &\geq \frac{t^2 xy}{\text{pgcd}(x, s) \text{pgcd}(x, t) \text{pgcd}(y, s) \text{pgcd}(y, t)} \left( \frac{t}{s} - 1 \right)^2 \\ &= \frac{xy}{\text{pgcd}(x, s) \text{pgcd}(x, t) \text{pgcd}(y, s) \text{pgcd}(y, t)} \frac{t^2}{s^2} (t - s)^2 \\ &\geq 1. \end{aligned}$$

Cela montre que  $\alpha(Q, Y_4) \geq 2$ . Mais les courbes spéciales  $Z_i$  (5.1) donnent des sous-variétés avec  $\alpha(Q, Z_i) = 2$  (remarque 2.5). Ceci clôt la démonstration.  $\square$

**Remarque 5.2.** Cette majoration uniforme indique un phénomène de « trou » en dimension 2 dans le zoom critique. C'est-à-dire, il existe  $\varepsilon_0 > 0$  tel que pour tout  $\varepsilon < \varepsilon_0$ , et pour tout  $B$ , on ait  $\delta_{U, Q, B, \frac{1}{2}}(\chi(\varepsilon)) = 0$ . Ceci peut aussi s'interpréter comme une inégalité du type Liouville :

$$d(P) \geq \frac{1}{H_{\omega_{Y_4}^{-1}}(P)^{\frac{1}{2}}}, \quad \forall P \in Y_4(\mathbb{Q}) \setminus \{Q\}.$$

### 5.2.2 Constante d'approximation essentielle

Considérons les courbes

$$C_{a,b} : axy(t - s)^2 = bst(y - x)^2 \quad (a, b) \in \mathbb{N}^2, \text{pgcd}(a, b) = 1.$$

Avec les coordonnées  $(w, z) = \left(\frac{y}{x}, \frac{t}{s}\right)$ , cette équation s'écrit

$$aw(z - 1)^2 = bz(w - 1)^2.$$

Elles forment donc une famille de courbes cubiques passant par les 4 points invariants avec un point singulier  $Q$ . La classe de  $C_{a,b}$  dans le groupe de Picard est la même que celle de  $\omega_{Y_4}^{-1}$  et on a

$$\deg_{\omega_{Y_4}^{-1}} C_{a,b} = 4.$$

Si  $a = b$ , la courbe

$$xy(t - s)^2 = st(y - x)^2$$

a en fait deux composantes irréductibles

$$yt = xs \quad \text{et} \quad xt = ys.$$

**Lemme 5.3.** Lorsque  $a \neq b$ , la courbe  $C_{a,b}$  est une courbe cubique géométriquement intègre qui est nodale.

*Démonstration.* Si  $a \neq b$ , le polynôme  $aw(z-1)^2 = bz(w-1)^2$  est irréductible sur  $\mathbb{C}[z, w]$ . Une courbe cubique irréductible singulière ne peut pas avoir qu'un point singulier qui est nodal ou cuspidal. Les tangentes au point  $Q$  sont de pente

$$\lim_{(w,z) \rightarrow (1,1)} \frac{z-1}{w-1} = \pm \sqrt{\frac{b}{a}} \lim_{(w,z) \rightarrow (1,1)} \sqrt{\left| \frac{z}{w} \right|} = \pm \sqrt{\frac{b}{a}}.$$

Donc  $Q$  est un point nodal de  $C_{a,b}$ . □

**Lemme 5.4.** Pour tout point rationnel  $P = (z_0, w_0)$  où  $z_0, w_0 > 0$ , il existe une unique courbe  $C_{a,b}$  passant par ce point.

*Démonstration.* On écrit (de façon unique) le quotient en une fraction positive réduite :

$$\frac{z_0^2(w_0+1)}{w_0^2(z_0+1)} = \frac{a_0}{b_0}. \quad (5.5)$$

Alors  $P \in C_{a_0, b_0}(\mathbb{Q})$ . □

Géométriquement, on considère  $\pi : \widetilde{Y}_4 \rightarrow Y_4$  l'éclatement de  $Y_4$  en  $Q$ , et on note  $\widetilde{C}_{a,b}$  la transformation stricte de  $C_{a,b}$ . Alors  $\widetilde{C}_{a,b}$  est une normalisation de  $C_{a,b}$  et  $\pi^{-1}(Q) = \{Q_1, Q_2\}$ . On peut voir  $\pm \sqrt{\frac{b}{a}}$  comme l'une des coordonnées de  $Q_i$ .

**Cas I.**  $a, b$  sont deux carrés de nombres entiers.

Alors  $\sqrt{\frac{b}{a}} \in \mathbb{Q}$  et  $Q_1, Q_2 \in \widetilde{C}_{a,b}(\mathbb{Q})$ . Approcher  $Q$  sur la courbe revient à approcher un nombre rationnel par des nombres rationnels. Donc

$$\alpha(Q, C_{a,b}) = \alpha(Q_i, \widetilde{C}_{a,b}) = \deg_{\omega_{Y_4}^{-1}} C_{a,b} = 4. \quad (5.6)$$

**Cas II.** l'un des  $a, b$  n'est pas le carré d'un entier, (noté  $(a, b) \notin \square^2$ )

Comme  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux,  $\sqrt{\frac{b}{a}} \notin \mathbb{Q}$ . Aucun des points  $Q_1, Q_2$  n'est défini sur  $\mathbb{Q}$ . L'approximation du point  $Q$  le long une branche de  $C_{a,b}$  est équivalente à l'approximation du point *irrationnel quadratique*  $Q_i$  (dépendant de la branche choisie) le long  $\widetilde{C}_{a,b}$ . Donc dans ce cas d'après le théorème 2.4,

$$\alpha(Q, C_{a,b}) = \alpha(Q_i, \widetilde{C}_{a,b}) = \frac{\deg_{\omega_{Y_4}^{-1}} C_{a,b}}{2} = 2. \quad (5.7)$$

Cependant, pour les 4 courbes spéciales  $Z_i$ , l'approximation au point  $Q$  est vraiment une approximation d'un point rationnel défini sur  $\mathbb{Q}$  sur  $\mathbb{P}^1$ , à savoir  $\alpha(Q, Z_i) = 2$ . Bien qu'elle aient la même constante d'approximation, le nombre des points rationnels que l'on trouve dans l'opération de zoom sont de grandeur très différente. C'est cette différence qui explique les phénomènes radicalement différents entre les deux types de courbes ci-dessus. On en conclut

**Théorème 5.5.** On a

$$\alpha_{\text{ess}}(Q) = \alpha(Q, Y_4) = 2.$$

Par conséquent, il n'y a pas de sous-variétés localement accumulatrices (Définition 2.3).

*Démonstration.* Cela résulte du fait que l'ensemble des  $C_{a,b}$  vérifiant la condition (H) est dense (même pour la topologie analytique) et de la borne inférieure que l'on a établies précédemment (Proposition 5.1) □

Donc la famille  $((C_{a,b})_{a,b})_{(a,b) \notin \square^2}$  donnent une autre façon de paramétrer les points rationnels bien adaptée à notre problème car la constante d'approximation sur elles est 2, plus petite celle donnée par les droites générales.

### 5.3 Zoom sur la surface $Y_4$

Nous utiliserons les courbes nodales  $C_{a,b}$  pour paramétrer les points rationnels autour de  $Q$ . Nous avons vu qu'elles n'ont pas la même constante d'approximation et nous avons constaté que l'approximation essentielle est prise sur celles vérifiant la condition  $(a, b) \notin \square^2$ . Regardons d'abord ce que la prédiction naïve nous donne. On note  $r$  le facteur de zoom et  $B$  la borne de la hauteur. Alors dans le zoom de facteur  $r$  le nombre de points rationnels dans le voisinage de diamètre  $\varepsilon$  devrait être

$$c_X B(\log B)^{\text{rg Pic}(Y_4)-1} \times O(B^{-\frac{\dim Y_4}{r}}) = O(B^{1-\frac{2}{r}}(\log B)^5). \quad (5.8)$$

Si  $r > 2 = \alpha_{\text{ess}}(Q, Y_4)$ , on devrait pouvoir trouver « beaucoup » de points c'est-à-dire de cardinal au moins une puissance de  $B$ . Si  $r = 2$ , *a priori* cette heuristique ne prédit pas grande chose. Nous allons montrer qu'en fait il y a au plus un nombre fini de points en dehors des courbes spéciales dans ce dernier cas.

#### 5.3.1 Paramétrage par des courbes nodales

Nous nous bornons à la région  $R$  (5.3). Puisque les droites

$$\frac{x}{y} = \frac{t}{s}, \quad \frac{x}{y} = 1$$

forment le bord du domaine  $R$ , il reste à trouver la distribution dans l'intérieur de  $R$ . Grâce au lemme 5.4, les courbes nodales donnent un paramétrage local des points rationnels. Donc le dénombrement des points rationnels dans l'intérieur de  $R$  peut se décomposer en des sommes des points sur chaque  $C_{a,b}$ . On va calculer la formule de la hauteur restreinte à  $C_{a,b}$  en choisissant un paramétrage rationnel des coordonnées de  $\mathbb{P}^1$  pour la courbe nodale.

Par la formule (5.5), seulement les courbes  $C_{a,b}$  avec  $a < b$  intersectent  $R$ . On fixe un couple  $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$  vérifiant la condition  $a < b$ . D'abord on change les coordonnées  $(w, z)$  en  $(w', z') = (w - 1, z - 1)$ . Alors l'équation de  $C_{a,b}$  devient

$$C_{a,b} : az'^2(w' + 1) = bw'^2(z' + 1). \quad (5.9)$$

D'après le principe de Bézout, une droite générale intersecte  $C_{a,b}$  en 3 points (comptant la multiplicité). La droite  $D_\lambda : z' = \lambda w'$  passe par  $(0, 0)$ . La multiplicité d'intersection  $C_{a,b} \cap D_\lambda$  en  $(0, 0)$  est 2. Donc cette droite intersecte  $C_{a,b}$  en un autre point rationnel  $(w'_\lambda, z'_\lambda)$  différent de  $(0, 0)$  avec  $z'_\lambda > w'_\lambda > 0$ . Un calcul nous donne

$$z'_\lambda = \frac{a\lambda^2 - b}{b - \lambda a}, \quad w'_\lambda = \frac{a\lambda^2 - b}{\lambda(b - \lambda a)}, \quad \left( \sqrt{\frac{b}{a}} < \lambda < \frac{b}{a} \right). \quad (5.10)$$

Revenons aux coordonnées  $(w, z)$ .

$$z_\lambda = \frac{\lambda a(\lambda - 1)}{b - \lambda a}, \quad w_\lambda = \frac{b(\lambda - 1)}{\lambda(b - \lambda a)}, \quad \left( \sqrt{\frac{b}{a}} < \lambda < \frac{b}{a} \right).$$

Donc on obtient un morphisme de paramétrage

$$\begin{aligned} \psi_{a,b} : \mathbb{P}^1 &\longrightarrow C_{a,b} \\ [u : v] &\longmapsto \left( \frac{\frac{u}{v}a(\frac{u}{v}-1)}{b - \frac{u}{v}a}, \frac{b(\frac{u}{v}-1)}{\frac{u}{v}(b - \frac{u}{v}a)} \right) = \left( \frac{ua(u-v)}{v(bv-ua)}, \frac{bv(u-v)}{u(bv-ua)} \right). \end{aligned}$$

On introduit la notation

$$d_1 = \text{pgcd}(u, b), \quad d_2 = \text{pgcd}(v, a), \quad d_3 = \text{pgcd}(u - v, b - a). \quad (5.11)$$

Alors

$$\begin{aligned} &\text{pgcd}(ua(u-v), v(bv-ua)) \\ &= \text{pgcd}(v, a) \text{pgcd}\left(\frac{ua(u-v)}{\text{pgcd}(v, a)}, \frac{v(bv-ua)}{\text{pgcd}(v, a)}\right) \\ &= \text{pgcd}(v, a) \text{pgcd}\left(\frac{ua(u-v)}{\text{pgcd}(v, a)}, bv-ua\right) \\ &= \text{pgcd}(v, a) \text{pgcd}(u(u-v), bv-ua) \\ &= \text{pgcd}(v, a) \text{pgcd}(u, bv-ua) \text{pgcd}(u-v, bv-ua) \\ &= \text{pgcd}(v, a) \text{pgcd}(u, b) \text{pgcd}(u-v, b-a) \\ &= d_1 d_2 d_3. \end{aligned}$$

et de la même façon,

$$\text{pgcd}(s, t) = \text{pgcd}(bv(u - v), u(bv - ua)) = \text{pgcd}(v, a) \text{pgcd}(u, b) \text{pgcd}(u - v, b - a) = d_1 d_2 d_3.$$

On trouve le paramétrage suivant pour les coordonnées primitives dans  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ .

$$x = \frac{u(bv - ua)}{d_1 d_2 d_3}, \quad y = \frac{bv(u - v)}{d_1 d_2 d_3}, \quad s = \frac{v(bv - ua)}{d_1 d_2 d_3}, \quad t = \frac{ua(u - v)}{d_1 d_2 d_3}. \quad (5.12)$$

On a alors

$$\begin{aligned} \text{pgcd}(y, t) &= \frac{u - v}{\text{pgcd}(u - v, b - a)} = \frac{u - v}{d_3}, \\ \text{pgcd}(y, s) &= \frac{v}{\text{pgcd}(v, a)} = \frac{v}{d_2}, \\ \text{pgcd}(x, t) &= \frac{u}{\text{pgcd}(u, b)} = \frac{u}{d_1}, \\ \text{pgcd}(x, s) &= \frac{bv - ua}{\text{pgcd}(u, b) \text{pgcd}(v, a) \text{pgcd}(u - v, b - a)} = \frac{bv - ua}{d_1 d_2 d_3}. \end{aligned}$$

Enfin on obtient la formule de la hauteur restreinte à  $C_{a,b}$  induite par l'image inverse sur  $\mathbb{P}^1$  dans la région  $R$  : pour  $[u : v] \in \mathbb{P}^1$  satisfaisant à  $\sqrt{\frac{b}{a}} < \frac{u}{v} < \frac{b}{a}$ ,

$$\begin{aligned} H_{\omega_{Y_4}^{-1}}(\psi_{a,b}([u : v])) &= \frac{t^2 xy}{\text{pgcd}(x, s) \text{pgcd}(x, t) \text{pgcd}(y, s) \text{pgcd}(y, t)} \\ &= \frac{b(ua(u - v))^2}{(\text{pgcd}(v, a) \text{pgcd}(u, b) \text{pgcd}(u - v, b - a))^2} \\ &= \frac{b(ua(u - v))^2}{(d_1 d_2 d_3)^2}. \end{aligned}$$

Pour  $\varepsilon > 0, B > 0$  fixés, on prend la fonction de test  $\chi(\varepsilon)$  et l'on regarde la distribution locale dans le voisinage de diamètre  $\varepsilon$  intersectant la région  $R$ , c'est-à-dire la quantité

$$\delta_{V,Q,B,r}(\chi(\varepsilon)) = \# \left\{ \begin{array}{l} P = [x : y] \times [s : t] \\ x, y, s, t > 0; \frac{t}{s} > \frac{x}{y} > 1 \end{array} \left| \begin{array}{l} B^{\frac{1}{r}} d(P) = B^{\frac{1}{r}} \left( \frac{t}{s} - 1 \right) \leq \varepsilon \\ H_{\omega_{Y_4}^{-1}}(P) = \frac{t^2 xy}{\text{pgcd}(x, s) \text{pgcd}(x, t) \text{pgcd}(y, s) \text{pgcd}(y, t)} \leq B \end{array} \right. \right\} \quad (5.13)$$

On le précisera comme un problème de dénombrement. Pour un couple  $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$  satisfaisant à  $a < b$ , considérons l'ensemble  $E(a, b, \varepsilon, B, r)$  des  $[u : v] \in \mathbb{P}^1$  vérifiant (cf. (5.10))

$$\sqrt{\frac{b}{a}} < \frac{u}{v} < \frac{b}{a}, \quad B^{\frac{1}{r}} d(P) = B^{\frac{1}{r}} \frac{\frac{u^2}{v^2} - \frac{b}{a}}{\frac{b}{a} - \frac{u}{v}} \leq \varepsilon, \quad (5.14)$$

$$H_{\omega_{Y_4}^{-1}}(\psi[u : v]) = \frac{b(ua(u - v))^2}{(\text{pgcd}(v, a) \text{pgcd}(u, b) \text{pgcd}(u - v, b - a))^2} \leq B. \quad (5.15)$$

Alors

$$\delta_{V,Q,B,r}(\chi(\varepsilon)) = \sum_{a,b \in (\mathbb{N}^*)^2, a < b} \#E(a, b, \varepsilon, B, r). \quad (5.16)$$

### 5.3.2 Zoom critique : la finitude

**Théorème 5.6.** *Pour tout  $\varepsilon > 0$ , on a que, pour tout  $B \gg_\varepsilon 1$ ,*

$$\delta_{V,Q,B,2}(\chi(\varepsilon)) = \sum_{\substack{(a,b) \notin \square^2 \\ a < b \leq \varepsilon^2}} \#E(a, b, \varepsilon, B, r) = O_\varepsilon(1).$$

Par conséquent, la sous-variété  $\cup_{i=1}^4 Z_i$  est celle localement faiblement accumulatrice (Définition 2.7). Il n'existe pas de mesure limite pour le zoom critique.

*Démonstration.* On démontre d'abord que, pour  $\varepsilon > 0$  fixé, en utilisant le paramétrage ci-dessus, dans le cas critique ( $r = 2$ ), il n'y a qu'un nombre fini de courbes  $C_{a,b}$  qui interviennent.

En factorisant  $v$ , l'inégalité (5.15) s'écrit

$$v^4 b a^2 \left( \left( \frac{u}{v} \right)^2 \left( \frac{u}{v} - 1 \right)^2 \right) \leq B d_1^2 d_2^2 d_3^2.$$

Donc

$$v^4 \leq \frac{B d_1^2 d_2^2 d_3^2}{b a^2 \left( \left( \frac{u}{v} \right)^2 \left( \frac{u}{v} - 1 \right)^2 \right)} \leq \frac{B d_1^2 d_2^2 d_3^2}{b^2 a \left( \sqrt{\frac{b}{a}} - 1 \right)^2}. \quad (5.17)$$

Donc en combinant avec (5.14), on en déduit

$$\begin{aligned} |au^2 - bv^2| &\leq \varepsilon a v^2 \left( \frac{b}{a} - \frac{u}{v} \right) B^{-\frac{1}{r}} \\ &\leq \varepsilon a \left( \frac{b}{a} - \sqrt{\frac{b}{a}} \right) \frac{d_1 d_2 d_3}{b \sqrt{a} \left( \sqrt{\frac{b}{a}} - 1 \right)} B^{\frac{1}{2} - \frac{1}{r}} \\ &= \frac{\varepsilon d_1 d_2 d_3}{\sqrt{b}} B^{\frac{1}{2} - \frac{1}{r}}, \end{aligned}$$

d'où

$$b \leq \varepsilon^2 \left( \frac{|au^2 - bv^2|}{d_1 d_2 d_3} \right)^{-2} B^{1 - \frac{2}{r}}. \quad (5.18)$$

Notons que  $d_1, d_2, d_3$  sont premiers deux à deux. Une observation importante est que

$$d_1 d_2 |au^2 - bv^2|, \quad d_3 |a(u^2 - v^2) - (b - a)v^2| = au^2 - bv^2,$$

et donc

$$d_1 d_2 d_3 |au^2 - bv^2|.$$

Cela nous donne la majoration du paramètre  $b$  pour  $r = 2$  :

$$b \leq \varepsilon^2 \left( \frac{|au^2 - bv^2|}{d_1 d_2 d_3} \right)^{-2} \leq \varepsilon^2,$$

ce qui signifie que dans un voisinage fixé après zoom, le nombre de courbes nodales est uniformément majoré, à savoir

$$\delta_{V,Q,B,2}(\chi(\varepsilon)) = \sum_{a < b \leq \varepsilon^2} \#E(a, b, \varepsilon, B, r).$$

Parmi ces courbes  $C_{a,b}$  qui interviennent, si  $(a, b) \in \square^2$ , on a  $\alpha(Q, C_{a,b}) = 4$  (5.6). Alors la Proposition 2.8 nous donne que

$$\delta_{Q,C_{a,b},B,2}(\chi(\varepsilon)) = \#E(a, b, \varepsilon, B, 2) = 0$$

pour tout  $B \gg_\varepsilon 1$ . Pour tous les  $(a, b) \notin \square^2$ , sur  $\mathbb{P}^1$  (l'image inverse de  $\psi_{a,b}$ ) on a une distance et une hauteur induites de celles sur  $Y_4$ , la hauteur étant équivalente à la hauteur de Weil canonique  $H_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1(4)}}$  (cf. (5.14), (5.15)). Comme (5.7), le zoom induit sur  $C_{a,b}$  avec le facteur  $r = 2$  est exactement le zoom critique. La majoration découle donc de la proposition 4.3. D'après le théorème 4.1, pour tout  $\varepsilon > \eta > 0$  suffisamment proches, on a

$$\liminf_B \delta_{V,Q,B,2}(\chi(\varepsilon, \eta)) = \liminf_B \delta_{Q, \bigcup_{\substack{(a,b) \notin \square^2 \\ b \leq \varepsilon^2}} C_{a,b}, B, 2}(\chi(\varepsilon, \eta)) = 0,$$

alors que pour tout  $(a, b) \notin \square^2$ , il existe certains couples  $(\varepsilon, \eta)$  tels que

$$\limsup_B \delta_{V,Q,B,2}(\chi(\varepsilon, \eta)) \geq \limsup_B \delta_{Q, C_{a,b}, B, 2}(\chi(\varepsilon, \eta)) \geq 1.$$

Cela démontre la non-existence de mesure limite. Le fait que  $Z_i$  est localement faiblement accumulatrice découle du Théorème A.1 puisque  $H_{\omega_{Y_4}^{-1}}|_{Z_i} \sim H_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1(2)}}$  sur  $Z_i$  et donc

$$\delta_{Z_i, Q, B, 2}(\chi(\varepsilon)) \gg_{\ll_\varepsilon} B^{\frac{1}{2}}.$$

□



### 5.3.3 Zoom sous-critique : une borne inférieure

On va démontrer une borne inférieure du nombre de points rationnels dans le zoom sous-critique ( $r > 2$ ) basé sur le fait que sur certaines courbes nodales on trouve « beaucoup » de points avec la hauteur et la distance induites (théorème 4.16).

Fixons  $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > 0, \tau_1 > \tau_2 > 1$ . Nous nous bornons à la région

$$W = W(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \tau_1, \tau_2) = \left\{ (w', z') \in \mathbb{R}^2 : \varepsilon_2 < z' \leq \varepsilon_1, \tau_2 \leq \frac{z'}{w'} \leq \tau_1 \right\} \subset R. \quad (5.19)$$

L'énoncé précis est le suivant. Rappelons que  $V = \varrho^{-1}(R) \subset Y_4 \setminus \cup_{i=1}^4 Z_i$ .

**Théorème 5.7.** *Pour*

$$2 < r < \frac{144}{55}, \quad 0 < \eta < \frac{1}{35}, \quad (5.20)$$

on a

$$\begin{aligned} & \delta_{V, Q, B, r}(\chi(W\varepsilon_1, \varepsilon_2, \tau_1, \tau_2)) \\ & \gg \sum_{\substack{* \\ \tau_2^2 < \frac{b}{a} < \tau_1^2 \\ b \leq B^{\eta(1-\frac{2}{r})}}} \#E(a, b, \varepsilon_1, \varepsilon_2, B) = B^{(1+\eta)(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})} (\log B)^3 \left( C_2 \int \chi(W(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \tau_1, \tau_2)) \frac{dx dy}{y} + O_{\tau_i, \varepsilon_i} \left( \frac{1}{\log B} \right) \right), \end{aligned}$$

où le symbole  $*$  signifie que la somme est prise sur les

$$(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad \text{pgcd}(a, b) = 1, \quad a < b, \quad (a, b) \notin \square^2 \quad (5.21)$$

et les ensembles  $E(a, b, \varepsilon_1, \varepsilon_2, B, r)$  sont définis de manière analogue à  $E(a, b, \varepsilon, B, r)$  en remplaçant (5.14) par  $\varepsilon_2 < B^{\frac{1}{r}} d(P) \leq \varepsilon_1$  et

$$C_2 = C_2(r) = \frac{9}{2\pi^2} \left( \eta \left( 1 - \frac{2}{r} \right) \right)^3 \prod_p \left( 1 - \frac{1}{p} \right)^3 \left( 1 + \frac{3}{p} - \frac{1}{p^2} - \frac{18}{p(p+2)} \right).$$

#### 5.3.3.1 Comptage sur les $C_{a,b}$

Au vu de (5.16), on va appliquer le théorème 4.16 pour compter le nombre de points dans le zoom de facteur  $r$  induit sur chaque  $C_{a,b}$ , à savoir le cardinal de chaque  $E(a, b, \varepsilon_1, \varepsilon_2, B, r)$ , avec un terme d'erreur précis. On rappelle la définition de la fonction  $\Psi_1$  (4.53). On définit une fonction multiplicative

$$\Psi(n) = \sum_{d|n} \Psi_1(d) \sum_{e|d} \frac{\mu(e)}{e} = \sum_{d|n} \Psi_1(d) \phi(d). \quad (5.22)$$

**Proposition 5.8.** *Supposons que*

$$2 < r < \frac{144}{55}. \quad (5.23)$$

Alors pour tout couple  $(a, b)$  satisfaisant à (5.21),

$$\tau_2^2 < ba^{-1} < \tau_1^2 \quad \text{et} \quad b^{\frac{17}{2}} \leq \frac{16\tau_2}{\tau_1 - 1} B^{\frac{1}{2}-\frac{1}{r}}. \quad (5.24)$$

on a que, pour tout  $\delta > 0$ ,

$$\begin{aligned} \#E(a, b, \varepsilon_1, \varepsilon_2, B, r) &= \#E(a, b, \varepsilon_1, B, r) - \#E(a, b, \varepsilon_2, B, r) \\ &= \frac{3}{2\pi^2} \frac{\Psi(b)\Psi(a)\Psi(b-a)}{ba^{\frac{1}{2}}} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) B^{\frac{1}{2}-\frac{1}{r}} + O_{\tau_i, \varepsilon_i, \delta} \left( b^{\frac{23}{8}+\delta} B^{\frac{3}{4}(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})} \log B \right) \end{aligned} \quad (5.25)$$

**Remarque 5.9.** Si l'on identifie localement une branche de  $C_{a,b}$  avec l'espace tangent de  $\mathbb{P}^1$  en le point  $\sqrt{\frac{b}{a}}$ , la proposition 5.8 indique qu'il existe une équidistribution sur chaque  $C_{a,b}$  ( $(a, b) \notin \square^2$ ) avec la hauteur et la distance induites (cf. (5.14), (5.15)).

*Démonstration.* Il suffit compter le cardinal de  $E(\varepsilon, a, b, B, r)$  pour  $\varepsilon$  fixé. La condition (5.15) correspond à la restriction de la hauteur  $H_{\omega_{Y_4}^{-1}}$  sur  $C_{a,b}$ , et une inversion de Möbius conduit à une condition de réseau. Dans un premier temps on voudrait réduire la condition (5.14) en un zoom avec d'une distance induite sur l'image inverse de  $\mathbb{P}^1 \rightarrow C_{a,b}$  pour que l'on puisse appliquer le théorème 4.16. On va approcher le cardinal de l'ensemble  $E(\varepsilon, a, b, B, r)$  par celui de l'ensemble  $F(\varepsilon, a, b, B, r)$  des  $[u : v]$  satisfaisant à

$$\sqrt{\frac{b}{a}} < \frac{u}{v} < \frac{b}{a}, \quad \frac{u}{v} - \sqrt{\frac{b}{a}} \leq \frac{\varepsilon}{2} \left( \sqrt{\frac{b}{a}} - 1 \right) B^{-\frac{1}{r}}, \quad (5.26)$$

$$v^4 \leq \frac{B d_1^2 d_2^2 d_3^2}{b^2 a \left( \sqrt{b a^{-1}} - 1 \right)^2} \quad (5.27)$$

On compare maintenant ces deux ensembles. Compte tenu l'encadrement sur  $\frac{u}{v}$ , la condition (5.14) implique que

$$\frac{u}{v} - \sqrt{\frac{b}{a}} \leq \frac{b a^{-1} - u v^{-1}}{u v^{-1} + \sqrt{b a^{-1}}} \varepsilon B^{-\frac{1}{r}} \leq \frac{b a^{-1} - \sqrt{b a^{-1}}}{2 \sqrt{b a^{-1}}} \varepsilon B^{-\frac{1}{r}} = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{b}{a}} - 1 \right) \varepsilon B^{-\frac{1}{r}}.$$

En combinant avec la majoration de  $v$  obtenue à partir de la condition (5.15), on conclut que

$$E(\varepsilon, a, b, B, r) \subset F(\varepsilon, a, b, B, r).$$

De plus en rappelant l'hypothèse sur  $(a, b)$ , on a d'après (5.26),

$$\frac{u}{v} - \sqrt{\frac{b}{a}} \leq \frac{\varepsilon(\tau_1 - 1)}{2} B^{-\frac{1}{r}}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{b a^{-1} - u v^{-1}}{u v^{-1} + \sqrt{b a^{-1}}} \varepsilon B^{-\frac{1}{r}} &> \frac{\varepsilon}{2} \left( \sqrt{\frac{b}{a}} - 1 \right) \varepsilon B^{-\frac{1}{r}} - \left( \frac{u v^{-1} - \sqrt{b a^{-1}}}{u v^{-1} + \sqrt{b a^{-1}}} + \frac{b a^{-1} - \sqrt{b a^{-1}}}{2 \sqrt{b a^{-1}}} - \frac{b a^{-1} - \sqrt{b a^{-1}}}{u v^{-1} + \sqrt{b a^{-1}}} \right) \varepsilon B^{-\frac{1}{r}} \\ &> \frac{\varepsilon}{2} \left( \sqrt{\frac{b}{a}} - 1 \right) \varepsilon B^{-\frac{1}{r}} - \left( \frac{u v^{-1} - \sqrt{b a^{-1}}}{2 \tau_2} + \frac{(u v^{-1} - \sqrt{b a^{-1}})(\tau_1^2 - \tau_1)}{4 \tau_2} \right) \varepsilon B^{-\frac{1}{r}} \\ &> \frac{\varepsilon}{2} \left( \sqrt{\frac{b}{a}} - 1 \right) \varepsilon B^{-\frac{1}{r}} - \frac{\varepsilon^2 (\tau_1^2 - \tau_1 + 2)(\tau_1 - 1)}{8 \tau_2} B^{-\frac{2}{r}}. \end{aligned}$$

Cela implique que

$$F(\varepsilon, a, b, B, r) \setminus E(\varepsilon, a, b, B, r) \subset G(\varepsilon, a, b, B, r),$$

où

$$G(a, b, \varepsilon, B, r) = \left\{ (u, v) \in \mathbb{N}_{\text{prem}}^2 \left| \begin{array}{l} \frac{\varepsilon}{2} \left( \sqrt{\frac{b}{a}} - 1 \right) B^{-\frac{1}{r}} - A(\varepsilon, \tau_i) B^{-\frac{2}{r}} \leq \frac{u}{v} - \sqrt{\frac{b}{a}} \leq \frac{\varepsilon}{2} \left( \sqrt{\frac{b}{a}} - 1 \right) B^{-\frac{1}{r}} \\ \sqrt{\frac{b}{a}} < \frac{u}{v} < \frac{b}{a} \\ v^4 \leq \frac{B d_1^2 d_2^2 d_3^2}{b^2 a \left( \sqrt{b a^{-1}} - 1 \right)^2} \end{array} \right. \right\},$$

avec  $A(\varepsilon, \tau_i) = \frac{\varepsilon^2 (\tau_1^2 - \tau_1 + 2)(\tau_1 - 1)}{8 \tau_2}$ . Ensuite on va borner le cardinal de  $G(\varepsilon, a, b, B, r)$ . Par une inversion de Möbius, on a

$$\#G(a, b, \varepsilon, B, r) = \sum_{\substack{e_i, f_i \\ e_1 f_1 | b, e_2 f_2 | a, e_3 f_3 | b-a}} \left( \prod_{i=1}^3 \mu(e_i) \right) \#G(e_i, f_i, a, b, \varepsilon, B)$$

où

$$\begin{aligned} &G(e_i, f_i, a, b, \varepsilon, B) \\ &= \left\{ (u, v) \in \mathbb{N}_{\text{prem}}^2 \left| \begin{array}{l} \frac{\varepsilon}{2} \left( \sqrt{\frac{b}{a}} - 1 \right) B^{-\frac{1}{r}} - A(\varepsilon, \tau_i) B^{-\frac{2}{r}} \leq \frac{u}{v} - \sqrt{\frac{b}{a}} \leq \frac{\varepsilon}{2} \left( \sqrt{\frac{b}{a}} - 1 \right) B^{-\frac{1}{r}} \\ \sqrt{b a^{-1}} < u v^{-1} < b a^{-1} \\ e_1 f_1 | u, e_2 f_2 | v, e_3 f_3 | u - v \\ v^4 \leq \frac{B f_1^2 f_2^2 f_3^2}{b^2 a \left( \sqrt{b a^{-1}} - 1 \right)^2} \end{array} \right. \right\}. \end{aligned}$$

Le points dans cet ensemble se trouvent dans l'intersection d'un triangle dont l'origine est l'un de ses sommets et l'aire est de grandeur  $O_{\tau_i}(B^{\frac{1}{2}-\frac{2}{r}}f_1f_2f_3b^{-1}a^{-\frac{1}{2}})$  avec le réseau

$$\Lambda_{e_if_i} = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : e_1f_1|x, e_2f_2|y, e_3f_3|y-x\} \quad (5.28)$$

Puisque  $\text{pgcd}(e_if_i, e_jf_j) = 1$  pour  $i \neq j$ , on vérifie que

$$\det(\Lambda_{e_if_i}) = e_1e_2e_3f_1f_2f_3.$$

Le lemme suivant nous permet de contrôler le nombre des points entiers primitifs dans une région planaire autour de l'origine. Pour une démonstration, voir [13, Lemma 2].

**Lemme 5.10.** *Soit  $\Lambda \subset \mathbb{Z}^2$  un réseau. Soit  $E \subset \mathbb{R}^2$  convexe dont le bord est lisse par morceau avec  $(0, 0) \in \overline{E}$ . Alors*

$$\#\{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \Lambda \cap E : \text{pgcd}(x_1, x_2) = 1\} \leq 4 \left(1 + \frac{\text{vol}(E)}{\det(\Lambda)}\right).$$

En utilisant ce lemme, on obtient que pour tout  $0 < \delta_1 < 1$ , comme  $\tau(n) \ll_{\delta_1} n^{\delta_1}$  ([25] I.5 Corollary 5.3),  $\sigma_\kappa(n) \ll_{\delta_1} n^{\kappa+\delta_1}$  [25, Theorem 5.7],

$$\begin{aligned} \#G(a, b, \varepsilon, B, r) &\ll \sum_{e_1f_1|b, e_2f_2|a, e_3f_3|b-a} \left(1 + O_{\tau_i} \left( \frac{B^{\frac{1}{2}-\frac{2}{r}}}{b^{\frac{3}{2}}e_1e_2e_3} \right)\right) \\ &\ll_{\tau_i} \sum_{n_1|b, n_2|a, n_3|b-a} \tau(n_1)\tau(n_2)\tau(n_3) \\ &\ll_{\delta_1, \tau_i} \sum_{n_1|b, n_2|a, n_3|b-a} (n_1n_2n_3)^{\delta_1} \\ &\ll_{\tau_i, \delta_1} \sigma_{\delta_1}(ba(b-a)) \\ &\ll_{\tau_i, \delta_1} b^{\delta_2}. \end{aligned}$$

où  $\delta_1, \delta_2$  peuvent être arbitrairement petits. On en conclut que

$$\#E(\varepsilon, a, b, B, r) = \#F(\varepsilon, a, b, B, r) + O_{\tau_i, \delta}(b^\delta).$$

Maintenant on compte le cardinal de  $F(a, b, \varepsilon, B, r)$ . Comme on a fait pour  $G(\varepsilon, a, b, B, r)$ , et par une inversion de Möbius on obtient

$$\#F(a, b, \varepsilon, B, r) = \sum_{e_1f_1|b, e_2f_2|a, e_3f_3|b-a} \left( \prod_{i=1}^3 \mu(e_i) \right) \#F(e_i, f_i, a, b, \varepsilon, B, r), \quad (5.29)$$

où

$$F(e_i, f_i, a, b, \varepsilon, B, r) = \left\{ (u, v) \in \mathbb{N}_{\text{prem}}^2 \mid \begin{array}{l} 0 < \frac{u}{v} - \sqrt{\frac{b}{a}} \leq \frac{\varepsilon_1}{2} \left( \sqrt{\frac{b}{a}} - 1 \right) B^{-\frac{1}{r}} \\ v^4 \leq \frac{Bf_1^2f_2^2f_3^2}{b^2a \left( \sqrt{ba^{-1}} - 1 \right)^2} \end{array} \right\}. \quad (5.30)$$

Nous allons appliquer le théorème 4.16. À cette fin on prend dans (5.30)

$$\Lambda' = \Lambda_{e_if_i}, \quad K' = \frac{(f_1f_2f_3)^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{4}} \left( \sqrt{ba^{-1}} - 1 \right)^{\frac{1}{2}}}, \quad \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2} \left( \sqrt{\frac{b}{a}} - 1 \right).$$

Notons qu'ici la signification de  $B$  et  $r$  sont différentes. On prend

$$B' = B^{\frac{1}{4}}, \quad r' = \frac{r}{4}.$$

**Lemme 5.11.** *La condition (5.24) sur  $r$  et  $b$  implique les condition (4.55) - (4.57).*

*Démonstration.* La condition (4.57) se traduit en

$$b \prod_{i=1}^3 e_i^2 f_i^2 \leq \frac{\prod_{i=1}^3 f_i}{ba^{\frac{1}{2}}(\sqrt{ba^{-1}} - 1)} B^{\frac{1}{2} - \frac{1}{r}} \Leftrightarrow b^{\frac{5}{2}} \sqrt{ab^{-1}} (\sqrt{ba^{-1}} - 1) \prod_{i=1}^3 e_i^2 f_i \leq B^{\frac{1}{2} - \frac{1}{r}}.$$

En utilisant la majoration

$$\prod_{i=1}^3 e_i \leq \prod_{i=1}^3 e_i f_i \leq ba(b-a),$$

la condition (5.24) sur  $b$  entraîne que

$$\begin{aligned} b^{\frac{5}{2}} \sqrt{ab^{-1}} (\sqrt{ba^{-1}} - 1) \prod_{i=1}^3 e_i^2 f_i &\leq b^{\frac{5}{2}} \frac{\tau_1 - 1}{\tau_2} (ba(b-a))^2 \\ &= b^{\frac{17}{2}} \frac{\tau_1 - 1}{\tau_2} \left( \frac{a}{b} \left( 1 - \frac{a}{b} \right) \right)^2 \\ &\leq b^{\frac{17}{2}} \frac{\tau_1 - 1}{16\tau_2} \leq B^{\frac{1}{2} - \frac{1}{r}}, \end{aligned}$$

d'où la condition (4.57). De plus, (5.24) sur  $r$  entraîne que  $\frac{1}{2} < r' < \frac{36}{55} < \frac{7}{10}$  et pour un tel  $r$  on a

$$\frac{2}{17} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{r} \right) < \frac{2}{5} \left( \frac{4}{5} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{4} \right) - \frac{3}{5} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{r} \right) \right).$$

Donc (5.24) implique la condition suivante vérifiées de la même façon, qui elle-même implique (4.56) pour tout  $B \gg_{\tau_i, \varepsilon} 1$

$$b^{\frac{5}{2}} \leq \tau_1^2 U(\tau_2, \varepsilon(\tau_2 - 1)/2) B^{\frac{4}{5}(\frac{1}{r} - \frac{1}{4}) - \frac{3}{5}(\frac{1}{2} - \frac{1}{r})}$$

□

*Suite de la démonstration de la proposition 5.8.* Donc on peut appliquer le théorème 4.16 avec les quantités  $\Lambda_{e_i f_i}, K', \varepsilon', B', r'$  ci-dessus et on obtient

$$\begin{aligned} \sharp F(e_i, f_i, a, b, \varepsilon, B, r) &= \frac{\Theta(\Lambda_{e_i f_i}) f_1 f_2 f_3}{4ba^{\frac{1}{2}}} \varepsilon B^{\frac{1}{2} - \frac{1}{r}} + O \left( (K')^{\frac{3}{2}} b^{\frac{1}{4}} \det(\Lambda_{e_i f_i})^{\frac{1}{2}} B^{\frac{3}{4}(\frac{1}{2} - \frac{1}{r})} \log B + K' b^{\frac{3}{2}} B^{\frac{1}{4} - \frac{1}{2r}} \log B \right) \\ &= \frac{3}{2\pi^2} \frac{\Psi_1(\det(\Lambda_{e_i f_i}))}{ba^{\frac{1}{2}} e_1 e_2 e_3} \varepsilon B^{\frac{1}{2} - \frac{1}{r}} + O \left( \frac{(e_1 e_2 e_3)^{\frac{1}{2}} (f_1 f_2 f_3)^{\frac{5}{4}}}{b^{\frac{7}{8}}} B^{\frac{3}{4}(\frac{1}{2} - \frac{1}{r})} \log B + b^{\frac{3}{4}} (f_1 f_2 f_3)^{\frac{1}{2}} B^{\frac{1}{4} - \frac{1}{2r}} \log B \right). \end{aligned} \quad (5.31)$$

En reportant dans (5.29), on calcule la somme du coefficient du terme principal

$$\sum_{e_1 f_1 | b, e_2 f_2 | a, e_3 f_3 | b-a} \left( \prod_{i=1}^3 \mu(e_i) \right) \frac{\Psi_1(\det(\Lambda_{e_i f_i}))}{e_1 e_2 e_3} = \Psi(b) \Psi(a) \Psi(b-a).$$

Rappelons la majoration pour la fonction  $\sigma_\kappa$ , [25, Theorem 5.7]

$$\sigma_\kappa(n) \ll n^\kappa, (\kappa > 1), \quad \sigma_\kappa(n) \ll_\delta n^{\kappa+\delta}, (0 < \kappa < 1, \forall \delta > 0).$$

On peut majorer le terme d'erreur de la façon suivante. Pour tout  $\delta > 0$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{e_1 f_1 | b, e_2 f_2 | a, e_3 f_3 | b-a} \frac{(e_1 e_2 e_3)^{\frac{1}{2}} (f_1 f_2 f_3)^{\frac{5}{4}}}{b^{\frac{7}{8}}} &= b^{-\frac{7}{8}} \sum_{n_1 | b, n_2 | a, n_3 | b-a} (n_1 n_2 n_3)^{\frac{1}{2}} \sigma_{\frac{3}{4}}(n_1) \sigma_{\frac{3}{4}}(n_2) \sigma_{\frac{3}{4}}(n_3) \\ &\ll_\delta b^{-\frac{7}{8}} \sum_{n_1 | b, n_2 | a, n_3 | b-a} \sigma_{\frac{5}{4}+\delta}(b) \sigma_{\frac{5}{4}+\delta}(a) \sigma_{\frac{5}{4}+\delta}(b-a) \\ &\ll_\delta b^{\frac{15}{4} - \frac{7}{8} + \delta} = b^{\frac{23}{8} + \delta}. \end{aligned}$$

Et pour tout  $\frac{5}{8} \geq \delta_2 > 3\delta_1 > 0$ ,

$$\begin{aligned}
\sum_{e_1 f_1 | b, e_2 f_2 | a, e_3 f_3 | b-a} b^{\frac{3}{4}} (f_1 f_2 f_3)^{\frac{1}{2}} &= b^{\frac{3}{4}} \sum_{n_1 | b, n_2 | a, n_3 | b-a} \sigma_{\frac{1}{2}}(n_1) \sigma_{\frac{1}{2}}(n_2) \sigma_{\frac{1}{2}}(n_3) \\
&\ll_{\delta_1} b^{\frac{3}{4}} \sum_{n_1 | b, n_2 | a, n_3 | b-a} (n_1 n_2 n_3)^{\frac{1}{2} + \delta_1} \\
&\ll_{\delta_1} b^{\frac{3}{4}} \sigma_{\frac{1}{2} + \delta_1}(ba(b-a)) \\
&\ll_{\delta_2} b^{\frac{9}{4} + \delta_2}
\end{aligned}$$

Compte tenu le terme d'erreur provenant du cardinal de  $G(a, b, \varepsilon, B, r)$ , on en conclut la formule asymptotique (5.25) sur chaque courbe  $C_{a,b}$ .  $\square$

### 5.3.3.2 Obtention de la borne inférieure

*Démonstration du théorème 5.7.* Tout d'abord rappelons le difféomorphisme local  $\varrho$  (5.2) et les notations de coordonnées de l'espace tangent

$$(w', z') = (w - 1, z - 1).$$

On déduit un encadrement des  $(a, b)$  tels que la courbe  $C_{a,b}$  intervienne dans le dénombrement (5.13) quand on prend la fonction caractéristique  $\chi(W(\varepsilon_1, \varepsilon, \tau_1, \tau_2))$  de la région  $W = W(\varepsilon_1, \varepsilon, \tau_1, \tau_2)$  (5.19) dans  $R$  (5.3). La condition de zoom dit que

$$\max(w', z') = z' = z - 1 \leq \varepsilon_1 B^{-\frac{1}{r}}. \quad (5.32)$$

Prenons un couple  $(a, b)$  vérifiant la condition (5.21), d'après l'équation (5.9) définissant l'image de la courbe  $C_{a,b}$ , on a

$$\frac{b}{a} = \frac{(z')^2(w' + 1)}{(w')^2(z' + 1)}.$$

On note

$$\delta(\varepsilon, B) = 1 + \varepsilon B^{-\frac{1}{r}}.$$

S'il existe  $(w', z') \in W \cap B^{-\frac{1}{r}} \varrho(C_{a,b})$ , alors d'après (5.32) on a

$$\frac{\tau_2^2}{\delta(\varepsilon_1, B)} = \frac{\tau_2^2}{1 + \varepsilon_1 B^{-\frac{1}{r}}} < \frac{b}{a} < \tau_1^2 (1 + \varepsilon_1 B^{-\frac{1}{r}}) = \tau_1^2 \delta(\varepsilon_1, B),$$

Maintenant prenons un couple  $(a, b)$  vérifiant (5.21) et

$$\tau_2^2 \delta(\varepsilon_1, B) < \frac{b}{a} < \frac{\tau_1^2}{\delta(\varepsilon_1, B)}.$$

Puisque un point  $(w', z') \in \varrho(C_{a,b})$  vérifie

$$\frac{(z')^2}{(w')^2} = \frac{b(z' + 1)}{a(w' + 1)},$$

la condition de zoom implique que sur la courbe  $C_{a,b}$ , si  $\max(w', z') \leq \varepsilon_1 B^{-\frac{1}{r}}$ ,

$$\tau_2^2 = \frac{\tau_2^2 \delta(\varepsilon_1, B)}{1 + \varepsilon_1 B^{-\frac{1}{r}}} < \frac{(z')^2}{(w')^2} < \frac{\tau_1^2 (1 + \varepsilon_1 B^{-\frac{1}{r}})}{\delta(\varepsilon_1, B)} = \tau_1^2.$$

Donc  $(w', z')$  donne un point de  $W \cap B^{-\frac{1}{r}} \varrho(C_{a,b})$ .

On restreint le dénombrement sur les  $(a, b)$  tels que  $(a, b) \notin \square^2$  car c'est sur telles  $C_{a,b}$  qu'on trouve une équidistribution de points pour le zoom sous-critique (Proposition 5.8). On en conclut que

$$\begin{aligned}
&\delta_{U,Q,B,r}(\chi(W\varepsilon_1, \varepsilon_2, \tau_1, \tau_2)) \\
&\geq \sum_{\tau_2^2 \leq \frac{b}{a} \leq \tau_1^2}^* \#E(\varepsilon_1, \varepsilon_2, a, b, B) + O \left( \sum_{\substack{\frac{\tau_2^2}{\delta(\varepsilon_1, B)} < \frac{b}{a} < \tau_2^2 \delta(\varepsilon_1, B) \text{ ou} \\ \frac{\tau_1^2}{\delta(\varepsilon_1, B)} < \frac{b}{a} < \tau_1^2 \delta(\varepsilon_1, B)}}^* \#E(\varepsilon_1, \varepsilon_2, a, b, B) \right) \quad (5.33)
\end{aligned}$$

Comme (cf. (4.53), (5.22))

$$\Psi(p^k) = \sum_{l=0}^k \Psi_1(p^l) \phi(p^l) = 1 + k \frac{1-p^{-1}}{1+p^{-1}} = k + 1 - \frac{2k}{p+1}, \quad (5.34)$$

d'où  $\Psi(n) \leq \tau(n)$  et leur différence est « petite ». Le terme principal (5.25) sur chaque courbe nodal fait apparaître la fonction  $\Psi$  qui ressemble à la fonction  $\tau$  c'est-à-dire au nombre de diviseurs au sens de la convolution, dont l'ordre moyen de ce type est connu grâce à une série de travaux de R. de la Bretèche et T. D. Browning ([8],[7],[5]). On donnera les détails dans les appendices, où nous décrivons les résultats.

On est en mesure de sommer les courbes  $C_{a,b}$  sur les paramètres  $(a, b)$  vérifiant

$$b \leq B^{\eta(1-\frac{2}{r})} = o(B^{\frac{2}{17}(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})}),$$

qui correspond à (5.24). Afin d'appliquer la proposition B.3 sur l'ordre moyen des diviseurs de formes binaires, on étend la somme sur les  $(a, b)$  vérifiant la condition (5.21) en rajoutant les  $(a, b)$  vérifiant la condition  $(a, b) \in \square^2$ . Le terme d'erreur correspondant est de grandeur

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{1 \leq \max(a,b) \leq B^{\eta(1-\frac{2}{r})} \\ a < b, (a,b) \in \square^2}} \frac{\Psi(b)\Psi(a)\Psi(b-a)}{ba^{\frac{1}{2}}} B^{\frac{1}{2}-\frac{1}{r}} &\ll \sum_{\substack{1 \leq \max(c,d) \leq B^{\eta(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})} \\ c > d}} \frac{\Psi(c^2)\Psi(d^2)\Psi(c^2-d^2)}{c^2d} B^{\frac{1}{2}-\frac{1}{r}} \\ &\ll \sum_{\substack{1 \leq \max(c,d) \leq B^{\eta(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})} \\ c > d}} \frac{\tau(c^2)\tau(d^2)\tau(c^2-d^2)}{c^2d} B^{\frac{1}{2}-\frac{1}{r}} \\ &\ll_{\delta_1} \sum_{\substack{1 \leq \max(c,d) \leq B^{\eta(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})}}} \frac{1}{c^{2-\delta_1}d} B^{\frac{1}{2}-\frac{1}{r}} \\ &\ll_{\delta_1} B^{\frac{1}{2}-\frac{1}{r}} \log B \end{aligned}$$

pour tout  $\delta_1 \in ]0, 1[$ . D'après la formule B.3 de la proposition B.1, la somme des termes principaux de (5.25) donne

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{a < b \leq B^{\eta(1-\frac{2}{r})} \\ \tau_2^2 \leq \frac{b}{a} \leq \tau_1^2 \\ \text{pgcd}(a,b)=1}} \frac{3}{2\pi^2} \frac{\Psi(b)\Psi(a)\Psi(b-a)}{ba^{\frac{1}{2}}} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) B^{\frac{1}{2}-\frac{1}{r}} \\ = \frac{9}{2\pi^2} C_1 \left( \eta \left( 1 - \frac{2}{r} \right) \right)^3 \left( \frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\tau_1} \right) (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) B^{(1+\eta)(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})} (\log B)^3 + O(B^{(1+\eta)(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})} (\log B)^2) \\ = \left( C_2 \int_{\substack{y \in ]\varepsilon_2, \varepsilon_1[ \\ t \in ]\tau_2, \tau_1[}} \frac{1}{t^2} dt dy \right) B^{(1+\eta)(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})} (\log B)^3 + O(B^{(1+\eta)(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})} (\log B)^2) \\ = \left( C_2 \int \chi(W(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \tau_1, \tau_2)) \frac{dx dy}{y} \right) B^{(1+\eta)(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})} (\log B)^3 + O(B^{(1+\eta)(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})} (\log B)^2). \end{aligned}$$

La contribution de la somme des termes d'erreur dans la Proposition 5.8 est majorée par

$$\begin{aligned} \sum_{a < b \leq B^{\eta(1-\frac{2}{r})}} b^{\frac{23}{8}+\delta} B^{\frac{3}{4}(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})} \log B &\ll \sum_{b \leq B^{\eta(1-\frac{2}{r})}} b^{\frac{23}{8}+1+\delta} B^{\frac{3}{4}(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})} \log B \\ &\ll B^{(\frac{39}{4}\eta+\frac{3}{4}+2\eta\delta)(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})} \log B \\ &= O(B^{(1+\eta)(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})} \log B), \end{aligned}$$

grâce à la condition (5.20) sur  $r$  et pour

$$0 < 8\delta \leq \frac{1}{\eta} - 35.$$

La contribution de la somme du terme d'erreur dans (5.33) est, en utilisant la formule B.3 encore,

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{\frac{\tau_2^2}{\delta(\varepsilon_1, B)} < \frac{b}{a} < \tau_2^2 \delta(\varepsilon_1, B) \text{ ou} \\ \frac{\tau_1^2}{\delta(\varepsilon_1, B)} < \frac{b}{a} < \tau_1^2 \delta(\varepsilon_1, B) \\ a < b \leq B^{\eta(1-\frac{2}{r})}}} \sharp E(\varepsilon_1, \varepsilon_2, a, b, B) \\
&= O \left( \left( \frac{1}{\sqrt{\tau_1^2/\delta(\varepsilon, B)}} - \frac{1}{\sqrt{\tau_1^2 \delta(\varepsilon, B)}} + \frac{1}{\sqrt{\tau_2^2/\delta(\varepsilon, B)}} - \frac{1}{\sqrt{\tau_2^2 \delta(\varepsilon, B)}} \right) B^{(1+\eta)(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})} (\log B)^3 \right) \\
&\quad + O_{\tau_i, \varepsilon_i} (B^{(1+\eta)(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})} \log B) \\
&= O_{\tau_i, \varepsilon} (B^{(1+\eta)(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})-\frac{1}{r}} (\log B)^3) + O_{\tau_i, \varepsilon_i} (B^{(1+\eta)(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})} \log B).
\end{aligned}$$

Cela termine la preuve du théorème 5.7.  $\square$

### 5.3.3.3 Remarque

Nous expliquons une raison pour laquelle nous ne choisissons pas à établir une formule asymptotique pour le zoom sous-critique. Comme l'on a vu, la prédiction naïve affirme que la puissance de  $B$  devrait être  $1 - \frac{2}{r}$ . En fait on a

$$b = O_\varepsilon(B^{1-\frac{2}{r}})$$

d'après (5.18). Le terme principal de la borne inférieure (théorème 5.7) deviendrait  $B^{1-\frac{2}{r}}(\log B)^3$  si l'on pourrait prendre la constante  $\eta = 1$ . Une difficulté se cache sur l'exactitude de la formule (5.25) pour les paramètres  $(a, b)$  grands (c'est-à-dire  $a, b > B^\lambda$  pour certain  $0 < \lambda < 1 - \frac{2}{r}$ ). Dans ce cas le zoom sur la courbe nodale  $C_{a,b}$  compte au plus un point et la technique utilisée dans ce texte ne permet pas de déterminer s'il est non-nul ou pas. Dans [14], nous avons surmonté un obstacle similaire à l'aide de la transformation de Cremona. Mais cette astuce n'est plus applicable ici car la transformation de Cremona préserve les courbes  $C_{a,b}$ .

## 5.4 Interprétation en terme d'ensemble mince

Le but de cette section est de signaler le fait que les points de  $Y_4$  sont en bijection avec un ensemble mince de  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ . Notons que, outre le morphisme d'implosion utilisé jusqu'à maintenant, la surface  $Y_4$  possède un autre morphisme vers  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  comme suit.

Le diviseur  $\omega_{Y_4}^{-1}$  définit un morphisme birationnel

$$f : Y_4 \rightarrow V \subset \mathbb{P}^4$$

dont l'image  $V$  est une surface torique de del Pezzo de degré 4 singulière de type  $4A_1$  définie comme l'intersection de deux quadriques dans  $\mathbb{P}^4$  :

$$x_0x_1 = x_2x_3 = x_4^2, \tag{5.35}$$

et l'éventail est un « croix » qui ressemble à celui de  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ .

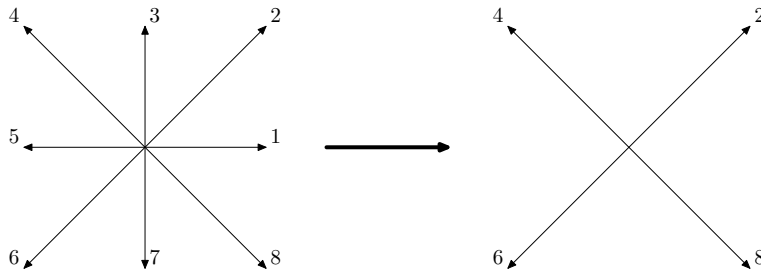


FIGURE 3 – La désingularisation  $Y_4 \rightarrow V$

Le morphisme  $f$  est en fait la désingularisation minimale torique de  $V$  puisque les diviseurs  $D_{2i-1}$  ( $1 \leq i \leq 4$ ) ont le nombre d'auto-intersection  $-2$ . L'équation

$$x_0x_1 = x_2x_3 \tag{5.36}$$

implique (comme pour toute surface de del Pezzo de degré 4 fibrée en conique) que  $Y_4$  possède deux projections vers la droite projective, et donc un morphisme  $g$  vers  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  qui est fini de degré générique 2. Plus précisément,  $g$  est défini de la façon suivante. D'abord la projection  $\wp : \mathbb{P}^4 \rightarrow \mathbb{P}^3$  depuis le point  $[0 : 0 : 0 : 0 : 1]$  est bien définie sur  $V$ . La variété de produit s'injecte sur  $\mathbb{P}^3$  comme une surface quadrique :

$$[u : v] \times [s : t] \longmapsto [us : vt : ut : vs].$$

Si l'on utilise les coordonnées  $[x_0 : x_1 : x_2 : x_3]$  venant de  $\mathbb{P}^4$ , l'image de  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  est définie par l'équation (5.36). En rappelons les équations (5.35),  $\wp$  induit un morphisme  $V \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  de degré générique 2 dont l'image est un ensemble mince de  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$  :

$$\{[u : v] \times [s : t] : uvst \in \square\}. \quad (5.37)$$

En les composant, on voit que le morphisme  $h = g \circ f : Y_4 \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  est un revêtement lisse de degré générique 2. De plus, on a

$$\omega_{Y_4}^{-1} = f^*(\omega_V^{-1}) = h^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)).$$

Le lieu de ramification est sur les diviseur du bord, donc autour du point  $[1 : 1] \times [1 : 1]$ ,  $f$  est un difféomorphisme. Par la fonctorialité de la hauteur on peut se ramener au cas de  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  restreinte à l'ensemble mince (5.37).

## 5.5 Autres variétés toriques

Dans cette section, on produira des variétés toriques de dimension supérieure sur lesquelles en dehors un fermé de Zariski les meilleures approximations se trouvent dans une famille de courbes nodales, comme pour  $Y_4$ . Elles sont construites en fait comme produits de  $Y_4$  avec d'autres variétés toriques.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , considérons la variété  $V_n = Y_4 \times \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^n$ . On note  $\pi_1, \pi_2$  les morphismes de projection vers  $Y_4$  et  $\mathbb{P}^n$ .

**Proposition 5.12.** *Pour  $Q \in V_n(\mathbb{Q})$  dans l'orbite ouverte, on a*

$$\alpha_{\text{ess}\omega_{V_n}^{-1}}(Q) = \alpha_{\text{ess}\omega_{Y_4}^{-1}}(\pi_1(Q)) + \alpha_{\text{ess}\omega_{\mathbb{P}^n}^{-1}}(\pi_2(Q)) = n + 3,$$

qui est atteinte sur une famille de courbes nodales couvrant un ouvert dense de  $V_n$ .

*Démonstration.* On peut supposer que  $\pi_1(Q)$  a pour coordonnées  $[1 : 1] \times [1 : 1]$  et  $\pi_2(Q) = [1 : \dots : 1]$ . Tout d'abord, comme  $\omega_{V_n}^{-1} = \pi_1^*(\omega_{Y_4}^{-1}) \otimes \pi_2^*(\omega_{\mathbb{P}^n}^{-1})$ , on choisit la hauteur de Weil associée à  $\omega_{V_n}^{-1}$  comme

$$H_{\omega_{V_n}^{-1}}(x, [y_0 : \dots : y_n]) = H_{\omega_{Y_4}^{-1}}(x) H_{\omega_{\mathbb{P}^n}^{-1}}([y_0 : \dots : y_n]), \quad H_{\omega_{\mathbb{P}^n}^{-1}}([y_0 : \dots : y_n]) = \max_{0 \leq i \leq n} (|y_i|)^{n+1},$$

et la distance  $d$  comme le maximum de celle  $d_1$  sur  $Y_4$  et  $d_2$  sur  $\mathbb{P}^n$  définie par la formule (pour  $y_0 \neq 0$ ),

$$d_2(\pi_2(Q), [y_0 : \dots : y_n]) = \max_{1 \leq i \leq n} \left| \frac{y_i}{y_0} - 1 \right|.$$

Par définition, si  $[y_0 : \dots : y_n] \neq Q$ ,

$$d_2(\pi_2(Q), [y_0 : \dots : y_n])^{n+1} H_{\omega_{\mathbb{P}^n}^{-1}}([y_0 : \dots : y_n]) \geq 1.$$

Donc pour un point général  $P \in V_n(\mathbb{Q})$  tel que  $d_1(\pi_1(Q), \pi_1(P)), d_2(\pi_2(Q), \pi_2(P)) \neq 0$ , on a, d'après la Proposition 5.1,

$$d(Q, P)^{n+3} H_{\omega_{V_n}^{-1}}(P) \geq d_1(\pi_1(Q), \pi_1(P))^2 H_{\omega_{Y_4}^{-1}}(\pi_1(P)) \times d_2(\pi_2(Q), \pi_2(P))^{n+1} H_{\omega_{\mathbb{P}^n}^{-1}}(\pi_2(P)) \geq 1.$$

Cela démontre que  $\alpha_{\text{ess}\omega_{V_n}^{-1}}(Q) \geq n + 3$ .

Ensuite on construit des courbes nodales dans  $V_n$  à partir de celles dans  $Y_4$ . Avec les notations dans la section 5.2, pour  $(a, b) \in \mathbb{N}_{\text{prem}}^*$ ,  $a < b$ , on a construit une courbe nodale  $C_{a,b}$  dans  $Y_4$  avec le morphisme de paramétrage  $\psi_{a,b}$  (5.10). Maintenant on prend une droite  $l$  dans  $\mathbb{P}^n$  avec un paramétrage  $\psi_l : \mathbb{P}^1 \rightarrow l$  qui envoie  $[0 : 1]$  sur  $\pi_2(Q)$ . On définit un morphisme de paramétrage comme suit

$$\Psi_{a,b,l} : \mathbb{P}^1 \rightarrow V_n,$$

$$\Psi_{a,b,l}([u : v]) = (\psi_{a,b}([u : v]), \psi_l \circ \theta_{a,b}([u : v])),$$



où  $\theta_{a,b} : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  est défini comme le revêtement double

$$\theta_{a,b}([u : v]) = [au^2 - bv^2 : v^2].$$

On voit que l'image de  $\Psi_{a,b,l}$  est une courbe rationnelle  $D_{a,b,l}$  nodale en  $Q = \Psi_{a,b,l}([\pm\sqrt{\frac{b}{a}} : 1])$  avec

$$\deg_{\omega_{V_n}^{-1}}(D_{a,b,l}) = \deg_{\omega_{Y_4}^{-1}}(\pi_1(D_{a,b,l})) + \deg_{\omega_{\mathbb{P}^n}^{-1}}(\pi_2(D_{a,b,l})) = 4 + 2(n+1) = 2n+6,$$

comme  $\pi_2 \circ \psi_l \circ \theta_{a,b}$  définit une droite double. On en déduit que

$$\alpha_{\omega_{V_n}^{-1}}(Q, D_{a,b,l}) = \frac{\deg_{\omega_{V_n}^{-1}}(D_{a,b,l})}{2} = n+3.$$

□

Plus concrètement, comme l'approximation diophantienne des nombres quadratiques est équivalente à la structure des équations de Pell-Fermat généralisées (cf. Section 3.2), en choisissant une famille de solutions primitives  $(\frac{x_n}{y_n})$  de l'équation

$$ax^2 - by^2 = a,$$

on obtient automatiquement une suite d'approximants  $P_n = \Psi_{a,b,l}([x_n : y_n])$  du point  $Q$  sur  $V_n$ . Puisque l'on a l'équivalence de hauteurs

$$H_{\omega_{V_n}^{-1}}(P_n) \sim H_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2n+6)}([x_n : y_n]) \sim y_n^{2n+6},$$

et l'équivalence de distances

$$d_1(\pi_1(P_n), Q) \sim d_2(\pi_2(P_n), Q) \sim \left| \frac{x_n^2}{y_n^2} - \sqrt{\frac{b}{a}} \right| \sim \left| \frac{x_n}{y_n} - \sqrt{\frac{b}{a}} \right|,$$

on est ramené au problème de l'approximation diophantienne d'un nombre quadratique particulier et la constante d'approximation se déduit des théorèmes de Dirichlet, Liouville, et Roth.

# Appendices

## A Distribution locale des $\mathbb{Q}$ -points sur la droite projective

Dans un souci de complétude, nous redémontrons le résultat de S. Pagelot concernant la distribution locale d'un  $\mathbb{Q}$ -point  $Q$  sur la droite projective  $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^1$ . Pour simplicité on suppose que  $Q = [0 : 1]$ ; le résultat pour un point général diffère par une constante.

### A.1 Énoncé du théorème

**Théorème A.1** (Pagelot [20]). *On a  $\alpha(Q, \mathbb{P}^1) = \alpha_{\text{ess}}(Q) = 1$ . On fixe la hauteur de Weil absolue associée au fibré  $\mathcal{O}(1)$  définie par*

$$H([u : v]) = \max(|u|, |v|), \quad (u, v) \in \mathbb{Z}, \quad \text{pgcd}(u, v) = 1,$$

*et l'on note  $r \geq 1$  le facteur de zoom. Soit  $f$  une fonction intégrable à support compact sur  $T_Q \mathbb{P}^1$ . Alors*

— *si  $r = 1$  alors*

$$\delta_{\mathbb{P}^1, Q, B, 1}(f) = B \int f(x) \frac{\sigma(x) dx}{x^2} + O_{\|f\|_{\infty}}(1),$$

*où*

$$\sigma(x) = \sum_{n \leq |x|} \varphi(n),$$

— *si  $r > 1$ , alors*

$$\delta_{\mathbb{P}^1, Q, B, r}(f) = B^{2-\frac{1}{r}} \frac{3}{\pi^2} \int f(x) dx + O_{\|f\|_{\infty}}(B(\log B)^{\frac{2}{3}}(\log \log B)^{\frac{4}{3}}).$$

On voit que dans les deux cas la mesure asymptotique existe. Pour le zoom critique, si  $\text{Supp}(f) \subset ]-1, 1[$ , alors  $\delta_{\mathbb{P}^1, Q, B, 1}(f) = 0$ . On observe donc qu'il y a un « trou » autour du point  $Q$ . Pour un zoom sous-critique (c'est-à-dire  $r > 1$ ), la distribution est uniforme.

### A.2 Démonstration du théorème

Rien dans cette section n'est nouveau. Le but est de rappeler comment traiter ce type de problème dans le cas le plus simple. Une observation basique, qui est aussi celle que l'on va suivre dans la suite, est qu'au lieu de considérer des fonctions intégrables générales, il suffit de regarder les fonctions « simple », c'est-à-dire les fonctions caractéristiques d'intervalles, car ces fonctions suffisent pour caractériser la convergence faible de mesures de probabilité.

On note les coordonnées de  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$  par  $[u : v]$ . Sans perte de généralité on peut supposer que  $u > 0$ . Puisque le point à approcher est  $Q = [0 : 1]$ , on utilise le difféomorphisme local  $\rho$  défini par

$$[u : v] \mapsto \frac{u}{v} \in \mathbb{R}.$$

Alors  $Q$  est envoyé sur l'origine  $O$ . Sur  $T_Q \mathbb{P}^1$  on utilise la distance canonique

$$d([u : v], Q) = \left| \frac{u}{v} \right|.$$

Par symétrie, il suffit d'examiner les fonctions caractéristique des intervalles  $]\eta, \varepsilon] \subset ]0, \infty[$ . On désigne par  $\chi(\eta, \varepsilon)$  une telle fonction. Nous remarquons ici que l'usage de cette notation a un sens légèrement différent dans les parties précédentes du texte. L'étude de la convergence de la suite  $\{\delta_{\mathbb{P}^1, Q, B, r}(\chi(\eta, \varepsilon))\}$  revient à l'estimation du cardinal de l'ensemble

$$F(\varepsilon, B, r) = \left\{ \begin{array}{l} P = [u : v] \neq [0 : 1] \\ \text{pgcd}(u, v) = 1 \end{array} \left| \begin{array}{l} 0 < B^{\frac{1}{r}} d(P, Q) = B^{\frac{1}{r}} \frac{u}{v} \leq \varepsilon \\ H(P) = \sup(u, v) \leq B \end{array} \right. \right\}, \quad (\text{A.1})$$

puisque  $\delta_{\mathbb{P}^1, Q, B, r}(\chi(\eta, \varepsilon)) = \#F(\varepsilon, B, r) - \#F(\eta, B, r)$ .

### A.2.1 Cas critique : $r = 1$

Les conditions (A.1) sur  $(u, v)$  implique que

$$u \leq \frac{\varepsilon|v|}{B} \leq \varepsilon.$$

Cela implique qu'il n'y a qu'un nombre fini de  $u$  dans un voisinage fixé et nous permet de fixer  $u$  tout en comptant  $v$ . On peut écrire

$$F(\varepsilon, B, 1) = \bigsqcup_{u \leq \varepsilon} F_u(\varepsilon, B, 1),$$

où

$$F_u(\varepsilon, B) = \{v \in \mathbb{N} : \text{pgcd}(u, v) = 1, u\varepsilon^{-1}B \leq v \leq B\}. \quad (\text{A.2})$$

On rappelle la définition de la fonction  $\phi$  (1.7) et l'on en déduit, en utilisant [6, Exercise 5.2]

$$\#F_u(\varepsilon, B, 1) = \phi(u) \left(1 - \frac{u}{\varepsilon}\right) B + O(\tau(u)). \quad (\text{A.3})$$

Alors

$$\begin{aligned} \delta_{\mathbb{P}^1, Q, B, 1}(\chi(\eta, \varepsilon)) &= \sum_{u \leq \varepsilon} \#F_u(\varepsilon, B) - \sum_{u \leq \eta} \#F_u(\eta, B) \\ &= \sum_{u \leq \eta} u\phi(u) \left(\frac{1}{\eta} - \frac{1}{\varepsilon}\right) B + \sum_{\eta < u \leq \varepsilon} \phi(u) \left(1 - \frac{u}{\varepsilon}\right) B + O(\varepsilon) \\ &= B \int \chi(\eta, \varepsilon)(x) \frac{\sigma(x) dx}{x^2} + O(\varepsilon). \end{aligned}$$

Cela clôt la démonstration du cas critique.

### A.2.2 Cas $r > 1$

Comme précédemment on a la décomposition

$$F(\varepsilon, B, r) = \bigsqcup_{u \leq \varepsilon} F_u(\varepsilon, B, r),$$

où

$$F_u(\varepsilon, B, r) = \{v \in \mathbb{N} : u\varepsilon^{-1}B^{\frac{1}{r}} \leq v \leq B\}.$$

Fixons  $u$  dans cette réunion. Pour que  $F_u(\varepsilon, B, r)$  soit non-vide, il faut que

$$u\varepsilon^{-1}B^{\frac{1}{r}} \leq B \Leftrightarrow u \leq \varepsilon B^{1-\frac{1}{r}}.$$

Avant de calculer le cardinal, citons d'abord quelques formules asymptotique bien connues (voir [25] §3.2, §3.4) :

$$\sum_{n \leq x} \varphi(n) = \frac{3}{\pi^2} x^2 + O(x(\log x)^{\frac{2}{3}} (\log \log x)^{\frac{4}{3}}), \quad (\text{A.4})$$

$$\sum_{n \leq x} \phi(n) = \frac{6}{\pi^2} x + O((\log x)^{\frac{2}{3}} (\log \log x)^{\frac{4}{3}}), \quad (\text{A.5})$$

$$\sum_{n \leq x} \tau(n) = O(x \log x). \quad (\text{A.6})$$

En appliquant ces formules, on obtient, encore d'après [6, Exercise 5.2]

$$\begin{aligned} \#F(\varepsilon, B, r) &= \sum_{u \leq \varepsilon B^{1-\frac{1}{r}}} \left( \phi(u) \left( B - \frac{uB^{\frac{1}{r}}}{\varepsilon} \right) + O(\tau(u)) \right) \\ &= \left( \frac{6}{\pi^2} \varepsilon B^{2-\frac{1}{r}} - \frac{3}{\pi^2} \varepsilon B^{2-\frac{1}{r}} \right) + O_\varepsilon(B(\log B)^{\frac{2}{3}} (\log \log B)^{\frac{4}{3}}) + O_\varepsilon(B^{1-\frac{1}{r}} \log B) \\ &= \frac{3}{\pi^2} \varepsilon B^{2-\frac{1}{r}} + O_\varepsilon(B(\log B)^{\frac{2}{3}} (\log \log B)^{\frac{4}{3}}), \end{aligned}$$

d'où

$$\delta_{\mathbb{P}^1, Q, B, r}(\chi(\eta, \varepsilon)) = B^{2-\frac{1}{r}} \left( \frac{3}{\pi^2} \int \chi(\eta, \varepsilon)(x) dx \right) + O_\varepsilon(B(\log B)^{\frac{2}{3}}(\log \log B)^{\frac{4}{3}}).$$

L'expression finale est achevée.

**Remarque A.2.** Quand  $r > 1$ , les points à dénombrer se trouvent dans un triangle dont la longueur du bord est négligeable par rapport à l'aire. On pourrait adapter la méthode utilisée dans la démonstration du même problème pour les nombres irrationnels (cf. Théorème 4.8). Le raisonnement décrit ici donne un meilleur terme d'erreur au niveau de la puissance de  $\log B$ .

### A.3 À propos des mesures limites

L'ordre de grandeur des nombres de points dans les zooms pour  $\mathbb{P}^1$  étant en accord avec celui prévu, nous discutons maintenant à quoi correspondent les mesures limites.

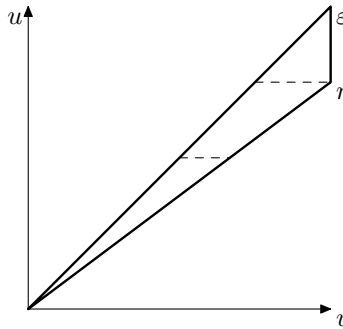
Prenons comme d'habitude la fonction caractéristique  $\chi(\varepsilon, \eta)$ . Si l'on identifie  $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$  avec l'ensemble des points primitifs dans  $\mathbb{Z}^2$  le comptage de points de hauteur bornée  $N(B) = \{P \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}) : H(P) \leq B\}$  équivaut au comptage des points primitifs dans le rectangle  $R(B) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max(|x|, |y|) \leq B\}$ . L'opération de zoom revient à prendre des points primitifs dans l'intérieur du triangle  $\Delta(\eta, \varepsilon, B, r)$  dont la taille dépend du facteur de zoom  $r$  et de la borne  $B$ .

Pour les zooms sous-critiques  $r > 1$ , l'ordre de grandeur de l'aire domine celui du bord, donc elle donne le terme principal. On a que

$$\frac{\delta_{\mathbb{P}^1, Q, B, r}(\chi(\eta, \varepsilon))}{\text{Vol}(\Delta(\eta, \varepsilon, B, r))} = \frac{\#N(B)}{\text{Vol}(R(B))}.$$

On voit que dans ce cas là les points primitifs sont équidistribués et l'on obtient une mesure proportionnelle à la mesure de Lebesgue. Cela coïncide avec celui du zoom sous-critique pour tous les nombres algébriques.

Pour le zoom critique  $r = 1$ , l'aire de  $\Delta(\eta, \varepsilon, B)$  et son bord ont la même d'ordre de grandeur  $B$ . Comme l'on a vu dans la démonstration, les points se trouvent en fait dans les droites horizontales dans l'intérieur du triangle dont la longueur est  $u \left( \frac{1}{\eta} - \frac{1}{\varepsilon} \right)$ .



Puisque

$$\frac{\delta_{\mathbb{P}^1, Q, B, 1}(\chi(\eta, \varepsilon))}{B} = \sum_u \#L(u),$$

où

$$L(u) = \left\{ v \in \mathbb{N} : \frac{u}{v} \text{ est une fraction réduite, } v \in \left] \frac{u}{\eta}, \frac{u}{\varepsilon} \right] \right\}.$$

On en conclut que sur chaque droite on compte des nombres rationnels avec le numérateur fixé. Cela explique d'où viennent la fonction densité  $\frac{1}{x^2}$  et la fonction arithmétique  $\sigma$ . On remarque que le phénomène pour des nombres algébriques est radicalement différent (pour eux dans le zoom de facteur 1 on trouve aussi une équidistribution, voir la section 4.2).

## B Le problème des diviseurs pour des formes binaires cubiques déployées

### B.1 Énoncé du résultat

Dans [5], T. D. Browning a étudié l'ordre moyen du nombre de diviseurs pour des formes binaires cubiques déployées, dont la technique remonte à [7], où les auteurs ont déduit une formule asymptotique de l'ordre moyen

primitif de fonctions arithmétiques « ressemblant » à la fonction donnant le nombres de diviseurs pour certaines formes binaires quartique. Ils l'utilisent pour démontrer que le nombre de points de hauteur bornée sur une surface de del Pezzo de degré 4 s'accorde avec la prédiction de Batyrev-Manin-Peyre. En les imitant, nous allons déduire une telle formule pour une forme binaire cubique particulière (la même démonstration marche pour toutes les formes binaires cubiques déployées, ce dont nous n'aurons pas besoin ici). On considère les fonctions arithmétiques

$$\Psi_1(n) = \prod_{p|n} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{-1}, \quad \Psi(n) = \sum_{d|n} \Psi_1(d) \sum_{e|d} \frac{\mu(e)}{e} = \sum_{d|n} \Psi_1(d) \phi(d),$$

et la constante  $C_1$  :

$$C_1 = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)^3 \left(1 + \frac{3}{p} - \frac{1}{p^2} - \frac{18}{p(p+2)}\right). \quad (\text{B.1})$$

**Proposition B.1.** *Soient  $\tau_1 > \tau_2 > 1, X \gg 1$ , on a*

$$\sum_{\substack{\max(x_1, x_2) \leq X \\ 1 < \tau_2 \leq x_2 x_1^{-1} \leq \tau_1 \\ \text{pgcd}(x_1, x_2) = 1}} \Psi(b)\Psi(a)\Psi(b-a) = \frac{C_1}{2} \left(\frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\tau_1}\right) X^2 (\log X)^3 + O(X^2 (\log X)^2), \quad (\text{B.2})$$

$$\sum_{\substack{\max(x_1, x_2) \leq X \\ 1 < \tau_2 \leq x_2 x_1^{-1} \leq \tau_1 \\ \text{pgcd}(x_1, x_2) = 1}} \frac{\Psi(b)\Psi(a)\Psi(b-a)}{ba^{\frac{1}{2}}} = 3C_1 \left(\frac{1}{\sqrt{\tau_2}} - \frac{1}{\sqrt{\tau_1}}\right) X^{\frac{1}{2}} (\log X)^3 + O(X^{\frac{1}{2}} (\log X)^2). \quad (\text{B.3})$$

## B.2 Préliminaires et résultats connus

On fixe trois formes linéaires à coefficients entiers primitives  $L_1, L_2, L_3$  en deux variables deux à deux linéairement indépendantes et  $\mathcal{R}$  un sous-ensemble convexe fermé borné de  $\mathbb{R}^2$  dont les coordonnées sont notées  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ . Pour  $X > 0$ , on note

$$X\mathcal{R} = \{X\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathcal{R}\}.$$

On suppose que  $L_i(\mathbf{x}) > 0$  pour  $\mathbf{x} \in \mathcal{R}$ . On note

$$L_\infty = L_\infty(L_i) = \max\{\|L_1\|, \|L_2\|, \|L_3\|\},$$

où  $\|L_i\|$  désigne le maximum des valeurs absolues des coefficients de  $L_i$ . On note aussi

$$r_\infty = r_\infty(\mathcal{R}) = \sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{R}} \max(|x_1|, |x_2|),$$

$$r' = r'(L_i, \mathcal{R}) = \max_{1 \leq i \leq 3} \sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{R}} L_i(\mathbf{x}).$$

Pour  $\mathbf{D} = (D_1, D_2, D_3) \in \mathbb{N}_{\geq 1}^3$ , on note  $D = D_1 D_2 D_3$  et

$$\Lambda(\mathbf{D}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2 : D_i | L_i(\mathbf{x})\}, \quad \varrho(\mathbf{D}, L_i) = \sharp(\Lambda(\mathbf{D}) \cap [0, D]^2).$$

La fonction  $\varrho$  se calcule comme

$$\varrho(\mathbf{D}) = \frac{D^2}{\det(\Lambda(\mathbf{D}))},$$

elle est donc multiplicative en dimension 3 :

$$\varrho(g_1 h_1, g_2 h_2, g_3 h_3) = \varrho(g_1, g_2, g_3) \varrho(h_1, h_2, h_3),$$

pourvu que  $\text{pgcd}(g_1 g_2 g_3, h_1 h_2 h_3) = 1$ . Pour  $p$  un nombre premier, on définit

$$\sigma_p(L_i) = \left(1 - \frac{1}{p}\right)^3 \sum_{\nu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3} \frac{\varrho(p^{\nu_1}, p^{\nu_2}, p^{\nu_3}; L_i)}{p^{2(\nu_1 + \nu_2 + \nu_3)}}. \quad (\text{B.4})$$

On note  $\delta(\mathbf{D})$  le plus grand entier tel que  $\Lambda(\mathbf{D}) \subset \delta \mathbb{Z}^2$ . Pour  $\mathbf{d}, \mathbf{D} \in \mathbb{N}_{\geq 1}^3$  tels que  $d_i | D_i$ , on a besoin de l'ordre moyen de la quantité suivante

$$S(X, \mathbf{d}, \mathbf{D}) = \sum_{\mathbf{x} \in \Lambda(\mathbf{D}) \cap X\mathcal{R}} \tau\left(\frac{L_1(\mathbf{x})}{d_1}\right) \tau\left(\frac{L_2(\mathbf{x})}{d_2}\right) \tau\left(\frac{L_3(\mathbf{x})}{d_3}\right). \quad (\text{B.5})$$

**Théorème B.2** ([5], Theorem 3). Soient  $\varepsilon > 0$ ,  $\frac{1}{4} < \theta < 1$ . Supposons que  $r'X^{1-\theta} \geq 1$ . Alors il existe un polynôme  $P \in \mathbb{R}[T]$  de degré 3 tel que

$$S(X, \mathbf{d}, \mathbf{D}) = \text{vol}(\mathcal{R})X^2P(\log X) + O_\varepsilon \left( \frac{D^\varepsilon L_\infty^{2+\varepsilon} r_\infty^\varepsilon}{\delta(\mathbf{D})} (r_\infty r'^{\frac{3}{4}} + r_\infty^2) X^{\frac{7}{4}+\varepsilon} \right),$$

où

$$\|P\| = O_\varepsilon(D^\varepsilon L_\infty^\varepsilon r_\infty^\varepsilon (1 + r'^{-1})^\varepsilon \det \Lambda(\mathbf{D})^{-1}),$$

et le coefficient du terme principal de  $P$  est  $C(\mathbf{d}, \mathbf{D}) = \prod_p \sigma_p(\mathbf{d}, \mathbf{D}, L_i)$  avec

$$\sigma_p(\mathbf{d}, \mathbf{D}, L_i) = \left(1 - \frac{1}{p}\right)^3 \sum_{\nu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3} \frac{\varrho(p^{N_1}, p^{N_2}, p^{N_3}, L_i)}{p^{2(N_1+N_2+N_3)}}, \quad (\text{B.6})$$

et pour  $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3$ ,

$$N_i = \max(v_p(D_i), \nu_i + v_p(d_i)), \quad (\text{B.7})$$

Pour une utilisation ultérieure, nous voudrions en savoir un peu plus sur la constante  $\sigma_p(\mathbf{d}, \mathbf{D}, L_i)$  ainsi que sur la constante  $C(\mathbf{d}, \mathbf{D})$ . Nous procédons comme dans [5] §3. On choisit une base  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  minimale pour  $\Lambda(\mathbf{D})$  au sens suivant

$$\|\mathbf{e}_1\| \|\mathbf{e}_2\| \ll \det(\Lambda(\mathbf{D})),$$

et on définit les formes linéaires binaires  $M_i$  via le changement de variables

$$d_i^{-1} L_i(\mathbf{x}) = M_i(\mathbf{v}), \quad \mathbf{x} = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{v} = (v_1, v_2).$$

Comme  $\det(\Lambda(\mathbf{D})) |D_1 D_2 D_3|$ , les formes  $M_i$  nouvellement construites satisfont à

$$L_\infty(M_i) = \max_{1 \leq i \leq 3} (\|M_i\|) \leq D_1 D_2 D_3 L_\infty(L_i) = D L_\infty. \quad (\text{B.8})$$

Soient  $m_i$  ( $1 \leq i \leq 3$ ) les entiers tels que  $M_i/m_i$  soient des formes primitives. Alors  $m_i | \det(\Lambda(\mathbf{D}))$  puisque l'on a supposé que les formes  $L_i$  sont primitives. On note

$$M_* = \text{ppcm}(m_1, m_2, m_3) | \det(\Lambda(\mathbf{D})). \quad (\text{B.9})$$

Fixons un nombre premier  $p$  et  $\nu \in \mathbb{Z}^3$ . Rappelons la définition de  $N_i$  (B.7) et considérons le réseau

$$\Lambda(\mathbf{D}_{p,\nu}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2 : p^{N_i} | L_i(\mathbf{x})\}.$$

On a que

$$\varrho(p^{N_1}, p^{N_2}, p^{N_3}, L_i) = \frac{p^{2(N_1+N_2+N_3)}}{\det(\Lambda(\mathbf{D}_{p,\nu}))}.$$

Après ce changement de variables on réécrit le réseau  $\Lambda(\mathbf{D}_{p,\nu})$  comme

$$\Lambda(\mathbf{D}_{p,\nu}) = \{\mathbf{x} = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2, \mathbf{v} \in \mathbb{Z}^2 : p^{\nu_i} | M_i(\mathbf{v})\}.$$

En même temps on définit un réseau

$$\Lambda'(\mathbf{D}_{p,\nu}) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^2 : p^{\nu_i} | M_i(\mathbf{v})\}.$$

Alors on obtient

$$\det(\Lambda(\mathbf{D}_{p,\nu})) = \det(\Lambda'(\mathbf{D}_{p,\nu})) \det(\Lambda(\mathbf{D})),$$

d'où

$$\begin{aligned} C(\mathbf{d}, \mathbf{D}) &= \prod_p \sigma_p(\mathbf{d}, \mathbf{D}, L_i) \\ &= \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)^3 \sum_{\nu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3} (\det(\Lambda(\mathbf{D}_{p,\nu})))^{-1} \\ &= \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)^3 \sum_{\nu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3} (\det(\Lambda'(\mathbf{D}_{p,\nu})) \det(\Lambda(\mathbf{D})))^{-1} \\ &= \frac{1}{\det(\Lambda(\mathbf{D}))} \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)^3 \sum_{\nu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3} \frac{\varrho(p^{\nu_1}, p^{\nu_2}, p^{\nu_3}; M_i)}{p^{2(\nu_1+\nu_2+\nu_3)}} \\ &= \frac{1}{\det(\Lambda(\mathbf{D}))} \prod_p \sigma_p(M_i). \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

On écrit le produit  $\prod_p \sigma_p(M_i)$  en une somme des fonctions multiplicatives en dimension 3 :

$$\prod_p \sigma_p(M_i) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_{\geq 1}^3} \frac{(\mu * f)(\mathbf{k})}{k_1 k_2 k_3}, \quad (\text{B.11})$$

où

$$\mu(\mathbf{d}) = \prod_{i=1}^3 \mu(d_i), \quad f(\mathbf{d}) = \frac{\varrho(\mathbf{d}, M_i)}{d_1 d_2 d_3}.$$

L'avantage de cette représentation est présenté dans le lemme suivant, qui sera utile pour la suite.

**Lemme B.3** ([5], Lemma 2.4). *Pour tout  $\varepsilon > 0$  et  $\delta_1, \delta_2, \delta_3 \geq 0$  telle que  $\sum_{i=1}^3 \delta_i < 1$ , on a*

$$\sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_{\geq 1}^3} \frac{|(\mu * f)(\mathbf{k})|}{k_1^{1-\delta_1} k_2^{1-\delta_2} k_3^{1-\delta_3}} \ll_{\varepsilon, \delta_i} L_\infty(M_i)^\varepsilon M_*^{\sum_{i=1}^3 \delta_i}.$$

En particulier, on a

$$\prod_p \sigma_p(M_i) \ll_\varepsilon L_\infty(M_i)^\varepsilon.$$

### B.3 Démonstration des formules asymptotiques

On définit une fonction arithmétique multiplicative  $h = \Psi * \mu * \mu$ . Rappelons la formule (5.22). Un calcul donne

$$\Psi * \mu(p^k) = \begin{cases} 1 - \frac{2}{p+1} & \text{si } k \geq 1 \\ 1 & \text{si } k = 0. \end{cases}$$

Donc

$$h(p^k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \geq 2; \\ -\frac{2}{p+1} & \text{si } k = 1; \\ 1 & \text{si } k = 0. \end{cases}$$

On obtient que

$$h(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1; \\ \prod_{p|n} -\frac{2}{p+1} & \text{si } n \neq 1 \text{ et } \mu^2(n) = 1; \\ 0 & \text{si } \mu^2(n) = 0. \end{cases}$$

En particulier

$$|h(n)| \leq \frac{2}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}_{\geq 1}. \quad (\text{B.12})$$

Donc  $h$  est *petite* dans le sens de (2.19) dans [7] : il existe  $\delta_0$  petit tel que la série

$$\sum_{d \in \mathbb{N}_{\geq 1}} \frac{|h(d)|}{d^{\frac{1}{2}-\delta_0}}$$

converge. Cette propriété jouera un rôle important dans le traitement des termes d'erreur. Dans la suite on fixe nos formes  $L_i$  comme

$$L_1 = x_1, \quad L_2 = x_2, \quad L_3 = x_2 - x_1,$$

et la région

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}(\tau_1, \tau_2) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_1, x_2 \leq 1, \tau_2 \leq x_2 x_1^{-1} \leq \tau_1\}.$$

Le but est d'obtenir la formule asymptotique pour la somme des points entiers dont les coordonnées  $x_1, x_2$  sont premières entre elles. Cela consiste en une application directe du théorème B.2 avec une inversion de Möbius comme fait dans [7, Corollaire 1] pour certaines formes binaires de degré 4. Malheureusement cela n'est pas fait dans [5]. Nous suivons les techniques venant de [7] pour démontrer les formules asymptotiques (B.3).

On définit pour  $\mathbf{d} = (d_1, d_2, d_3) \in \mathbb{N}_{\geq 1}^3$ ,

$$\varrho^*(\mathbf{d}) = \varrho^*(\mathbf{d}, L_i) = \#\{\mathbf{x} \in \Lambda(\mathbf{d}) \cap [0, d_1 d_2 d_3]^2 : \text{pgcd}(x_1, x_2, d_1 d_2 d_3) = 1\}.$$

Soient  $\mathbf{D}, \mathbf{d} = (d_1, d_2, d_3) \in \mathbb{N}_{\geq 1}^3$  comme précédemment avec  $\text{pgcd}(d_i, d_j) = \text{pgcd}(D_i, D_j) = 1$ . La sommation dont la formule asymptotique cherchée est

$$S^*(X, \mathbf{d}, \mathbf{D}) = \sum_{\substack{\mathbf{x} \in X\mathcal{R} \cap \Lambda(\mathbf{D}) \\ \text{pgcd}(x_1, x_2) = 1}} \tau\left(\frac{L_1(\mathbf{x})}{d_1}\right) \tau\left(\frac{L_2(\mathbf{x})}{d_2}\right) \tau\left(\frac{L_3(\mathbf{x})}{d_3}\right). \quad (\text{B.13})$$

**Lemme B.4.**

$$S^*(X, \mathbf{d}, \mathbf{D}) = C^*(\mathbf{d}, \mathbf{D}) \text{vol}(\mathcal{R}) X^2 (\log X)^3 + O_\varepsilon\left(X^2 (\log X)^2 \left(1 + \frac{D^\varepsilon}{\det(\Lambda(\mathbf{D}))}\right)\right) + O_\varepsilon\left(\left(\frac{D^\varepsilon}{\delta(\mathbf{D})} + 1\right) X^{\frac{23}{12} + \varepsilon}\right), \quad (\text{B.14})$$

où  $C^*(\mathbf{d}, \mathbf{D}) = \prod_p \sigma_p^*(\mathbf{d}, \mathbf{D})$  avec

$$\sigma_p^*(\mathbf{d}, \mathbf{D}) = \begin{cases} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^3 \sum_{\nu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3} \frac{\varrho^*(p^{N_1}, p^{N_2}, p^{N_3})}{p^{2(N_1 + N_2 + N_3)}} \text{ si } v_p(D) \geq 1 \\ \left(1 - \frac{1}{p}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{p^2} + \sum_{\substack{\nu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3 \\ \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 \geq 1}} \frac{\varrho^*(p^{\nu_1}, p^{\nu_2}, p^{\nu_3})}{p^{2(\nu_1 + \nu_2 + \nu_3)}}\right) \text{ si } v_p(D) = 0 \end{cases} \quad (\text{B.15})$$

*Démonstration.* Par une inversion de Möbius, on a

$$S^*(X, \mathbf{d}, \mathbf{D}) = \sum_{e \in \mathbb{N}_{\geq 1}} \mu(e) \sum_{\substack{\mathbf{x} \in X\mathcal{R} \cap \Lambda(\mathbf{D}) \\ e \mid \text{pgcd}(x_1, x_2)}} \tau\left(\frac{L_1(\mathbf{x})}{d_1}\right) \tau\left(\frac{L_2(\mathbf{x})}{d_2}\right) \tau\left(\frac{L_3(\mathbf{x})}{d_3}\right). \quad (\text{B.16})$$

On définit  $y_i = x_i/e$ , et on note

$$\Lambda_e(\mathbf{D}) = \Lambda(\mathbf{D}, eL_i) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2 : D_i \mid eL_i(\mathbf{x})\}.$$

Comme

$$\mathbf{x} \in X\mathcal{R} \cap \Lambda(\mathbf{D}) \cap e\mathbb{Z}^2 \Leftrightarrow \mathbf{y} \in (X/e)\mathcal{R} \cap \Lambda_e(\mathbf{D}),$$

La somme B.13 s'écrit comme

$$S^*(X, \mathbf{d}, \mathbf{D}) = \sum_{e \in \mathbb{N}_{\geq 1}} \mu(e) S(X/e, \mathbf{d}, \mathbf{D}, eL_i) \quad (\text{B.17})$$

$$= \sum_{e \leq X} \mu(e) \sum_{\mathbf{x} \in \Lambda_e(\mathbf{D}) \cap (X/e)\mathcal{R}} \tau\left(\frac{eL_1(\mathbf{x})}{d_1}\right) \tau\left(\frac{eL_2(\mathbf{x})}{d_2}\right) \tau\left(\frac{eL_3(\mathbf{x})}{d_3}\right). \quad (\text{B.18})$$

On divise cette somme en deux parties, une pour les  $e$  petits et l'autre pour les  $e$  grands. On applique le théorème B.2 à  $S(X/e, \mathbf{d}, \mathbf{D}, eL_i)$  en notant que

$$L_\infty(eL_i) = e, \quad r'(eL_i) = e, \quad r_\infty = 1,$$

et on obtient en notant

$$C(\mathbf{d}, \mathbf{D}, e) = \prod_p \sigma_p(\mathbf{d}, \mathbf{D}, eL_i), \quad (\text{B.19})$$

$$\begin{aligned} S(X/e, \mathbf{d}, \mathbf{D}, eL_i) &= C(\mathbf{d}, \mathbf{D}, e) \text{vol}(\mathcal{R}) \left(\frac{X}{e}\right)^2 \left(\log\left(\frac{X}{e}\right)\right)^3 \\ &\quad + O_\varepsilon\left(\frac{D^\varepsilon e^{2+\varepsilon}}{\delta(\mathbf{D})} (e^{\frac{3}{4}} + 1) \left(\frac{X}{e}\right)^{\frac{7}{4} + \varepsilon}\right) + O_\varepsilon\left(X^2 (\log X)^2 \frac{\log e}{e^2} \frac{D^\varepsilon e^\varepsilon}{\det(\Lambda(\mathbf{D}))}\right) \\ &= C(\mathbf{d}, \mathbf{D}, e) \text{vol}(\mathcal{R}) \left(\frac{X}{e}\right)^2 \left(\log\left(\frac{X}{e}\right)\right)^3 \\ &\quad + O_\varepsilon\left(\frac{D^\varepsilon}{\delta(\mathbf{D})} e X^{\frac{7}{4} + \varepsilon}\right) + O_\varepsilon\left(X^2 (\log X)^2 \frac{\log e}{e^{2-\varepsilon}} \frac{D^\varepsilon}{\det(\Lambda(\mathbf{D}))}\right). \end{aligned}$$



En outre, on a une majoration ([5], (2.5))

$$S(X/e, \mathbf{d}, \mathbf{D}, eL_i) \ll e^\varepsilon \left(\frac{X}{e}\right)^{2+\varepsilon} = \frac{X^{2+\varepsilon}}{e^2}. \quad (\text{B.20})$$

Donc on peut majorer le terme d'erreur comme

$$\begin{aligned} \sum_{e \leq X^{\frac{1}{12}}} \frac{D^\varepsilon}{\delta(\Lambda(\mathbf{D}))} eX^{\frac{7}{4}+\varepsilon} &\ll \frac{D^\varepsilon}{\delta(\mathbf{D})} X^{\frac{23}{12}+\varepsilon}, \\ \sum_{X^{\frac{1}{12}} \leq e \leq X} \frac{X^{2+\varepsilon}}{e^2} &\ll \frac{X^{2+\varepsilon}}{X^{\frac{1}{12}}} = X^{\frac{23}{12}+\varepsilon}. \end{aligned}$$

En reportant dans (B.16), on obtient

$$\begin{aligned} S^*(X, \mathbf{d}, \mathbf{D}) &= \sum_{e \leq X^{\frac{1}{12}}} + \sum_{X^{\frac{1}{12}} \leq e \leq X} \mu(e) S(X/e, \mathbf{d}, \mathbf{D}, eL_i) \\ &= \sum_{e=1}^{\infty} \frac{\mu(e)}{e^2} C(\mathbf{d}, \mathbf{D}, e) \text{vol}(\mathcal{R}) X^2 (\log X)^3 + O_\varepsilon \left( X^2 (\log X)^2 \left( 1 + \frac{D^\varepsilon}{\det(\Lambda(\mathbf{D}))} \right) \right) + O_\varepsilon \left( \left( \frac{D^\varepsilon}{\delta(\mathbf{D})} + 1 \right) X^{\frac{23}{12}+\varepsilon} \right). \end{aligned}$$

On note pour  $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}, \nu \in \mathbb{Z}^3$ ,

$$\bar{\varrho}_k(p^{\nu_1}, p^{\nu_2}, p^{\nu_3}, L_i) = \frac{\#\{\mathbf{x} \in [0, p^{\nu_1+\nu_2+\nu_3}]^2 : p^{\nu_i} | p^{v_p(k)} L_i(\mathbf{x})\}}{p^{2(\nu_1+\nu_2+\nu_3)}}.$$

on calcule maintenant la constante, avec les notations (B.6) et (B.19),

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^{\infty} \frac{\mu(e)}{e^2} C(\mathbf{d}, \mathbf{D}, e) &= \sum_{e \in \mathbb{N}_{\geq 1}} \mu(e) \left( \frac{1}{e^2} \prod_p \left( 1 - \frac{1}{p} \right)^3 \sum_{\nu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3} \bar{\varrho}_e(p^{N_1}, p^{N_2}, p^{N_3}, L_i) \right) \\ &= \prod_p \left( 1 - \frac{1}{p} \right)^3 \sum_{\nu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3} \sum_{k \in \{0,1\}} (-1)^k \frac{\bar{\varrho}_{p^k}(p^{N_1}, p^{N_2}, p^{N_3}, L_i)}{p^{2k}} \\ &= \prod_p \sigma_p^*(\mathbf{d}, \mathbf{D}). \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

Vérifions que les facteurs locaux  $\sigma_p^*(\mathbf{d}, \mathbf{D})$  sont donnés par (B.15). Si  $v_p(D) \geq 1$ , on définit le réseau

$$\Lambda' = \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2 : p^{N_i} | pL_i(\mathbf{x}), 1 \leq i \leq 3\}.$$

Alors on a

$$\begin{aligned} \#\left(\Lambda' \cap [0, p^{N_1+N_2+N_3}]^2\right) &= \frac{p^{2(N_1+N_2+N_3)}}{\det(\Lambda')} = p^2 \#\left(\Lambda' \cap [0, p^{N_1+N_2+N_3-1}]^2\right). \\ \sigma_p^*(\mathbf{d}, \mathbf{D}) &= \left(1 - \frac{1}{p}\right)^3 \sum_{\nu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3} \left( \frac{\varrho(p^{N_1}, p^{N_2}, p^{N_3}, L_i)}{p^{2(N_1+N_2+N_3)}} - \frac{\varrho(p^{N_1}, p^{N_2}, p^{N_3}, pL_i)}{p^{2(N_1+N_2+N_3+1)}} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{p}\right)^3 \sum_{\nu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3} \left( \frac{\varrho(p^{N_1}, p^{N_2}, p^{N_3}, L_i)}{p^{2(N_1+N_2+N_3)}} - \frac{\#\left(\Lambda' \cap [0, p^{N_1+N_2+N_3}]^2\right)}{p^{2(N_1+N_2+N_3+1)}} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{p}\right)^3 \sum_{\nu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3} \left( \frac{\varrho(p^{N_1}, p^{N_2}, p^{N_3}, L_i)}{p^{2(N_1+N_2+N_3)}} - \frac{\#\left(\Lambda' \cap [0, p^{N_1+N_2+N_3-1}]^2\right)}{p^{2(N_1+N_2+N_3)}} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{p}\right)^3 \sum_{\nu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3} \left( \frac{\#\{\mathbf{x} \in [0, p^{N_1+N_2+N_3}]^2 : p^{N_i} | L_i(\mathbf{x})\} - \#\{\mathbf{y} \in [0, p^{N_1+N_2+N_3}]^2 : p | y_i, p^{N_i} | L_i(\mathbf{y})\}}{p^{2(N_1+N_2+N_3)}} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{p}\right)^3 \sum_{\nu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3} \frac{\varrho^*(p^{N_1}, p^{N_2}, p^{N_3})}{p^{2(N_1+N_2+N_3)}}. \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

Si  $v_p(D) = 0$ , on a dans ce cas pour  $\nu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3$ ,  $N_i = \nu_i$  et donc en remarquant que

$$\sum_{k \in \{0,1\}} (-1)^k \frac{\bar{\varrho}_{p^k}(1, 1, 1; L_i)}{p^{2k}} = 1 - \frac{1}{p^2},$$

on obtient

$$\sigma_p^*(\mathbf{d}, \mathbf{D}) = \left(1 - \frac{1}{p}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{p^2} + \sum_{\substack{\nu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3 \\ \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 \geq 1}} \frac{\varrho^*(p^{\nu_1}, p^{\nu_2}, p^{\nu_3})}{p^{2(\nu_1 + \nu_2 + \nu_3)}}\right). \quad (\text{B.23})$$

□

Maintenant on est prêt à déduire la formule asymptotique pour la fonction  $\Psi$ .

*Démonstration de la Proposition B.2.* On voit que, d'après  $h = \Psi * \mu * \mu$  et  $\tau = \mathbf{1} * \mathbf{1}$ ,

$$\Psi = \Psi * \mu * \mu * \mathbf{1} * \mathbf{1} = h * \mathbf{1} * \mathbf{1} = h * \tau.$$

On fixe les trois formes linéaires

$$L_1(\mathbf{x}) = x_1, \quad L_2(\mathbf{x}) = x_2, \quad L_3(\mathbf{x}) = x_2 - x_1, \quad (\text{B.24})$$

et la région

$$\mathcal{R} = \left\{ (x_1, x_2) \in ]0, 1]^2 : \tau_2 \leq \frac{x_2}{x_1} \leq \tau_1 \right\}.$$

Alors

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{\mathbf{x} \in X\mathcal{R} \\ \text{pgcd}(x_1, x_2)=1}} \Psi(x_1)\Psi(x_2)\Psi(x_2 - x_1) \\ &= \sum_{\substack{\mathbf{x} \in X\mathcal{R} \\ \text{pgcd}(x_1, x_2)=1}} \sum_{\substack{\mathbf{d} \in \mathbb{N}^3 \\ d_1 | x_1, d_2 | x_2, d_3 | x_2 - x_1}} \prod_{i=1}^3 h(d_i) \tau\left(\frac{x_1}{d_1}\right) \tau\left(\frac{x_2}{d_2}\right) \tau\left(\frac{x_2 - x_1}{d_3}\right) \\ &= \sum_{\substack{\mathbf{d} \in \mathbb{N}_{\geq 1}^3 \\ \text{pgcd}(d_i, d_j)=1}} \left( \prod_{i=1}^3 h(d_i) \right) \sum_{\substack{\mathbf{x} \in X\mathcal{R} \cap \Lambda(\mathbf{d}) \\ \text{pgcd}(x_1, x_2)=1}} \tau\left(\frac{x_1}{d_1}\right) \tau\left(\frac{x_2}{d_2}\right) \tau\left(\frac{x_2 - x_1}{d_3}\right) \\ &= \sum_{\substack{\mathbf{d} \in \mathbb{N}_{\geq 1}^3 \\ \text{pgcd}(d_i, d_j)=1}} \left( \prod_{i=1}^3 h(d_i) \right) S^*(X, \mathbf{d}, \mathbf{d}), \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

la quantité  $S^*(X, \mathbf{d}, \mathbf{d})$  étant nulle s'il existe  $d_i$  tel que  $d_i > X$ . D'après (B.14), on a, en notant  $C^*(\mathbf{d}) = C^*(\mathbf{d}, \mathbf{d})$ ,

$$S^*(X, \mathbf{d}, \mathbf{d}) = C^*(\mathbf{d}) \text{vol}(\mathcal{R}) X^2 (\log X)^3 + O_\varepsilon((d_1 d_2 d_3)^{\varepsilon-1} X^2 (\log X)^2) + O_\varepsilon((d_1 d_2 d_3)^\varepsilon B^{\frac{23}{12} + \varepsilon}).$$

Le terme principal de la sommation est

$$C_1 \text{vol}(\mathcal{R}) X^2 (\log X)^3,$$

où d'après (B.21),

$$C_1 = \sum_{\substack{\mathbf{d} \in \mathbb{N}_{\geq 1}^3 \\ \text{pgcd}(d_i, d_j)=1}} \left( \prod_{i=1}^3 h(d_i) \right) C^*(\mathbf{d}) = \prod_p C_{1,p}. \quad (\text{B.26})$$

Grâce à notre choix des formes linéaires (B.24), fixons un nombre premier  $p$ , on a que pour  $\#\{i : \nu_i \geq 1\} \geq 2$ ,

$$\begin{aligned} & \varrho^*(p^{\nu_1}, p^{\nu_2}, p^{\nu_3}) \\ &= \#\{ \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2 : p^{\nu_1} | x_1, p^{\nu_2} | x_2, p^{\nu_3} | x_2 - x_1, p \nmid \text{pgcd}(x_1, x_2) \} \cap [0, p^{\sum_{i=1}^3 \nu_i}]^2 = 0. \end{aligned}$$

On calcule pour  $\nu \geq 1$ ,

$$\begin{aligned}\varrho^*(p^\nu, 1, 1) &= \#(\{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2 : p^\nu | x_1, p \nmid \text{pgcd}(x_1, x_2)\} \cap [0, p^\nu]^2) \\ &= \#(\{\mathbf{x} = (0, x_2) : p \nmid x_2\} \cap [0, p^\nu]) \\ &= \varphi(p^\nu) = p^\nu - p^{\nu-1}.\end{aligned}$$

De façon analogue on a

$$\varrho^*(1, p^\nu, 1) = \varrho^*(1, 1, p^\nu) = p^\nu - p^{\nu-1}.$$

On en déduit les valeurs de  $\sigma_p^*$  (B.15) comme suit.

$$\begin{aligned}\sigma_p^*(1, 1, 1) &= \left(1 - \frac{1}{p}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{p^2} + \sum_{\nu \in \mathbb{N}_{\geq 1}} \left(\frac{\varrho^*(p^\nu, 1, 1) + \varrho^*(1, p^\nu, 1) + \varrho^*(1, 1, p^\nu)}{p^{2\nu}}\right)\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{p}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{p^2} + 3 \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{\nu \in \mathbb{N}_{\geq 1}} \frac{1}{p^\nu}\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{p}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{p^2} + \frac{3}{p}\right).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_p^*(p, 1, 1) &= \sigma_p^*(1, p, 1) = \sigma_p^*(1, 1, p) \\ &= \left(1 - \frac{1}{p}\right)^3 \sum_{\nu \in \mathbb{N}_{\geq 1}} \frac{\varrho^*(p^\nu, 1, 1) + \varrho^*(1, p^\nu, 1) + \varrho^*(1, 1, p^\nu)}{p^{2\nu}} \\ &= \left(1 - \frac{1}{p}\right)^3 \times \frac{3}{p}.\end{aligned}$$

Donc le facteur local (B.26) se calcule, en rappelant que  $h(p) = -\frac{2}{p+2}$ ,

$$\begin{aligned}C_{1,p} &= \sum_{\substack{\nu \in \mathbb{N}^3 \\ \#\{i: \nu_i \geq 1\} \leq 1}} \left(\prod_{i=1}^3 h(p^{\nu_i})\right) \sigma_p^*(p^{\nu_1}, p^{\nu_2}, p^{\nu_3}) \\ &= h(1)\sigma_p^*(1, 1, 1) + h(p) (\sigma_p^*(p, 1, 1) + \sigma_p^*(1, p, 1) + \sigma_p^*(1, 1, p)) \\ &= \left(1 - \frac{1}{p}\right)^3 \left(1 + \frac{3}{p} - \frac{1}{p^2} - \frac{18}{p(p+2)}\right).\end{aligned}$$

Donc

$$C_1 = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)^3 \left(1 + \frac{3}{p} - \frac{1}{p^2} - \frac{18}{p(p+2)}\right). \quad (\text{B.27})$$

Or on a aussi une majoration pour  $S^*(X, \mathbf{d}, \mathbf{d})$  ([5], (3.1)) :

$$S(X, \mathbf{d}, \mathbf{d}) \ll \frac{X^{2+\varepsilon}}{d_1 d_2 d_3} + X^{1+\varepsilon},$$

qui découle des majorations standards pour le nombre de diviseurs et pour le dénombrement des points sur un réseau. Soit  $\delta > 0$  tel que  $\delta > \varepsilon$  et  $\varepsilon(1+3\delta) < \frac{1}{12}$ . Comme précédemment on décompose la somme en deux parties

$$\max_{1 \leq i \leq 3} (d_i) \leq X^\delta \text{ et } \exists i, d_i > X^\delta$$

selon la taille de  $\mathbf{d}$ . Cela nous permet de contrôler les termes d'erreur, compte-tenu de (B.12),

$$\begin{aligned}&\sum_{\mathbf{d} \in \mathbb{N}_{\geq 1}^3} \prod_{i=1}^3 |h(d_i)| (d_1 d_2 d_3)^{\varepsilon-1} X^2 (\log X)^2 \\ &\ll \sum_{\mathbf{d} \in \mathbb{N}_{\geq 1}^3} (d_1 d_2 d_3)^{\varepsilon-2} X^2 (\log X)^2 \ll X^2 (\log X)^2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{\mathbf{d} \in \mathbb{N}_{\geq 1}^3 \\ \max(d_i) \leq X^\delta}} \prod_{i=1}^3 |h(d_i)| (d_1 d_2 d_3)^\varepsilon X^{\frac{23}{12} + \varepsilon} \\
& \ll \sum_{\substack{\mathbf{d} \in \mathbb{N}_{\geq 1}^3 \\ \max(d_i) \leq X^\delta}} (d_1 d_2 d_3)^{\varepsilon-1} X^{\frac{23}{12} + \varepsilon} \\
& \ll X^{\frac{23}{12} + \varepsilon(1+3\delta)}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{\mathbf{d} \in \mathbb{N}_{\geq 1}^3 \\ \max(d_i) \leq X \\ \exists i: d_i > X^\delta}} \prod_{i=1}^3 |h(d_i)| \left( \frac{X^{\varepsilon+2}}{d_1 d_2 d_3} + X^{1+\varepsilon} \right) \\
& \ll \sum_{\substack{\mathbf{d} \in \mathbb{N}_{\geq 1}^3 \\ \exists d_i > X^\delta}} \frac{X^{\varepsilon+2}}{(d_1 d_2 d_3)^2} + \sum_{\substack{\mathbf{d} \in \mathbb{N}_{\geq 1}^3 \\ \max(d_i) \leq X}} \frac{X^{1+\varepsilon}}{d_1 d_2 d_3} \\
& \ll X^{2+\varepsilon-\delta} + X^{1+\varepsilon} (\log X)^3.
\end{aligned}$$

D'après le Lemme B.3 et la majoration (B.8), on a

$$C^*(\mathbf{d}, \mathbf{d}) \leq C(\mathbf{d}, \mathbf{d}) = \frac{1}{\det(\Lambda(\mathbf{d}))} \prod_p \sigma_p(M_{i, \mathbf{d}}) \ll_\varepsilon (d_1 d_2 d_3)^{\varepsilon-1},$$

d'où

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{\mathbf{d} \in \mathbb{N}_{\geq 1}^3 \\ \text{pgcd}(d_i, d_j)=1 \\ \max(d_i) \leq X^\delta}} \prod_{i=1}^3 h(d_i) C^*(\mathbf{d}) = C_1 + O \left( \sum_{\substack{\mathbf{d} \in \mathbb{N}_{\geq 1}^3 \\ \exists i: d_i > X^\delta}} \prod_{i=1}^3 |h(d_i)| C(\mathbf{d}, \mathbf{d}) \right) \\
& = C_1 + O \left( \sum_{\substack{\mathbf{d} \in \mathbb{N}_{\geq 1}^3 \\ \exists i: d_i > X^\delta}} \frac{1}{(d_1 d_2 d_3)^{2-\varepsilon}} \right) \\
& = C_1 + O(X^{\delta(\varepsilon-1)}).
\end{aligned}$$

On en conclut que (B.25) peut se calculer comme

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{\mathbf{x} \in X\mathcal{R} \\ \text{pgcd}(x_1, x_2)=1}} \Psi(x_1) \Psi(x_2) \Psi(x_2 - x_1) \\
& = \sum_{\substack{\mathbf{d} \in \mathbb{N}_{\geq 1}^3 \\ \text{pgcd}(d_i, d_j)=1 \\ \max(d_i) \leq X^\delta}} + \sum_{\substack{\mathbf{d} \in \mathbb{N}_{\geq 1}^3 \\ \text{pgcd}(d_i, d_j)=1 \\ \exists i, d_i > X^\delta}} \left( \prod_{i=1}^3 h(d_i) \right) S^*(X, \mathbf{d}, \mathbf{d}) \\
& = C_1 \text{vol}(\mathcal{R}) X^2 (\log X)^3 + O(X^2 (\log X)^2 + X^{\frac{23}{12} + \varepsilon(1+3\delta)}) + O(X^{2-\delta(1-\varepsilon)} (\log B)^3 + X^{2-(\delta-\varepsilon)}) \\
& = C_1 \text{vol}(\mathcal{R}) X^2 (\log X)^3 + O(X^2 (\log X)^2).
\end{aligned} \tag{B.28}$$

Cela démontre la formule B.2 de la Proposition B.1 en remarquant que

$$\text{vol}(\mathcal{R}) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\tau_1} \right).$$

□

Démonstration de la formule B.3. Tout d'abord on traite la somme

$$T(\mathcal{R}) = T(\tau_1, \tau_2) = \sum_{\substack{\mathbf{x} \in X\mathcal{R} \\ \text{pgcd}(x_1, x_2)=1}} \frac{\Psi(x_1)\Psi(x_2)\Psi(x_2 - x_1)}{x_2^{\frac{3}{2}}}. \quad (\text{B.29})$$

Comme

$$\frac{1}{x_2^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{2} \int_{x_2}^X \frac{dt}{t^{\frac{5}{2}}} + \frac{1}{X^{\frac{3}{2}}},$$

on obtient, d'après le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned} T(\tau_1, \tau_2) &= \sum_{\substack{\mathbf{x} \in X\mathcal{R} \\ \text{pgcd}(x_1, x_2)=1}} \Psi(x_1)\Psi(x_2)\Psi(x_2 - x_1) \left( \frac{3}{2} \int_{x_2}^X \frac{dt}{t^{\frac{5}{2}}} + \frac{1}{X^{\frac{3}{2}}} \right) \\ &= \int_1^X \frac{3}{2} \sum_{\substack{\mathbf{x} \in t\mathcal{R} \\ \text{pgcd}(x_1, x_2)=1}} \Psi(x_1)\Psi(x_2)\Psi(x_2 - x_1) \frac{dt}{t^{\frac{5}{2}}} + X^{-\frac{3}{2}} \sum_{\substack{\mathbf{x} \in X\mathcal{R} \\ \text{pgcd}(x_1, x_2)=1}} \Psi(x_1)\Psi(x_2)\Psi(x_2 - x_1) \\ &= \frac{3C_1}{2} \text{vol}(\mathcal{R}) \int_1^X \frac{(\log t)^3}{t^{\frac{1}{2}}} dt + O\left(\int_1^X \frac{(\log t)^2}{t^{\frac{1}{2}}} dt\right) + O(X^{\frac{1}{2}}(\log X)^2). \end{aligned}$$

Comme

$$\int_1^X \frac{(\log t)^3}{t^{\frac{1}{2}}} dt = 2X^{\frac{1}{2}}(\log X)^3 + O(X^{\frac{1}{2}}(\log X)^2), \quad \int_1^X \frac{(\log t)^2}{t^{\frac{1}{2}}} dt = O(X^{\frac{1}{2}}(\log X)^2),$$

l'égalité ci-dessus s'écrit

$$T(\tau_1, \tau_2) = 3C_1 \text{vol}(\mathcal{R}) X^{\frac{1}{2}}(\log X)^3 + O(X^{\frac{1}{2}}(\log X)^2). \quad (\text{B.30})$$

Finalement on arrive à sommer

$$\frac{\Psi(x_1)\Psi(x_2)\Psi(x_2 - x_1)}{x_2 x_1^{\frac{1}{2}}}.$$

On définit  $f(t) = \sqrt{t}$  et on rappelle que

$$\mathcal{R}(t, \tau_1) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_1, x_2 \leq 1, t \leq \frac{x_2}{x_1} \leq \tau_1\}.$$

Alors

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{\mathbf{x} \in X\mathcal{R} \\ \text{pgcd}(x_1, x_2)=1}} \frac{\Psi(x_1)\Psi(x_2)\Psi(x_2 - x_1)}{x_2 x_1^{\frac{1}{2}}} \\ &= \sum_{\substack{\mathbf{x} \in X\mathcal{R} \\ \text{pgcd}(x_1, x_2)=1}} \frac{\Psi(x_1)\Psi(x_2)\Psi(x_2 - x_1)}{x_2^{\frac{3}{2}}} f\left(\frac{x_2}{x_1}\right) \\ &= \sum_{\substack{\mathbf{x} \in X\mathcal{R} \\ \text{pgcd}(x_1, x_2)=1}} \frac{\Psi(x_1)\Psi(x_2)\Psi(x_2 - x_1)}{x_2^{\frac{3}{2}}} \left( f(\tau_2) + \int_{\tau_2}^{\frac{x_2}{x_1}} f'(t) dt \right) \\ &= f(\tau_2)T(\tau_1, \tau_2) + \sum_{\substack{\mathbf{x} \in X\mathcal{R} \\ \text{pgcd}(x_1, x_2)=1}} \frac{\Psi(x_1)\Psi(x_2)\Psi(x_2 - x_1)}{x_2^{\frac{3}{2}}} \int_{\tau_2}^{\frac{x_2}{x_1}} f'(t) dt. \end{aligned}$$

Il résulte de (B.30) que

$$f(\tau_2)T(\tau_1, \tau_2) = \frac{3C_1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{\tau_2}} - \frac{\sqrt{\tau_2}}{\tau_1} \right) X^{\frac{1}{2}}(\log X)^3 + O(X^{\frac{1}{2}}(\log X)^2).$$

Il faut traiter le deuxième terme. D'après le théorème de Fubini et (B.30) en remplaçant  $\tau_2$  par  $t$ ,

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{\mathbf{x} \in X\mathcal{R} \\ \text{pgcd}(x_1, x_2)=1}} \frac{\Psi(x_1)\Psi(x_2)\Psi(x_2-x_1)}{x_2^{\frac{3}{2}}} \int_{\tau_2}^{\frac{x_2}{x_1}} f'(t) dt \\
&= \int_{\tau_2}^{\tau_1} \sum_{\substack{\mathbf{x} \in X\mathcal{R}(t, \tau_1) \\ \text{pgcd}(x_1, x_2)=1}} \frac{\Psi(x_1)\Psi(x_2)\Psi(x_2-x_1)}{x_2^{\frac{3}{2}}} f'(t) dt \\
&= \frac{3C_1}{2} X^{\frac{1}{2}} (\log X)^3 \int_{\tau_2}^{\tau_1} \frac{1}{2} \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{\tau_1} \right) \frac{1}{\sqrt{t}} dt + O(X^{\frac{1}{2}} (\log X)^2) \\
&= \frac{3C_1}{2} X^{\frac{1}{2}} (\log X)^3 \left( \frac{\sqrt{\tau_2}}{\tau_1} + \frac{1}{\sqrt{\tau_2}} - \frac{2}{\sqrt{\tau_1}} \right) + O(X^{\frac{1}{2}} (\log X)^2).
\end{aligned}$$

On obtient finalement que

$$\sum_{\substack{\mathbf{x} \in X\mathcal{R} \\ \text{pgcd}(x_1, x_2)=1}} \frac{\Psi(x_1)\Psi(x_2)\Psi(x_2-x_1)}{x_2\sqrt{x_1}} = 3C_1 \left( \frac{1}{\sqrt{\tau_2}} - \frac{1}{\sqrt{\tau_1}} \right) X^{\frac{1}{2}} (\log X)^3 + O(X^{\frac{1}{2}} (\log X)^2). \quad (\text{B.31})$$

□

## Remerciement

Je tiens à remercier Emmanuel Peyre pour m'avoir proposé ce problème et pour des conseils tout au long de mon travail. Régis de la Bretèche, Marc Hindry m'ont donné des indications très précieuses. Je les en remercie chaleureusement. Des parties de ce travail ont été faites à l'Université Paris-Diderot et à Beijing International Center for Mathematical Research dont l'atmosphère stimulante est sincèrement apprécié. L'auteur est partiellement supporté par le projet ANR Gardio.

## Références

- [1] Victor V. Batyrev, On the classification of smooth projective toric varieties. Tôhoku Math. J., II. 43, No.4, 569-585 (1991).
- [2] Victor V. Batyrev, Yuri I. Manin, Sur le nombre des points rationnels de hauteur borné des variétés algébriques. Math. Ann. 286, No. 1-3, 27-43 (1990).
- [3] Victor V. Batyrev, Yuri Tschinkel, Rational points of bounded height on compactifications of anisotropic tori, Intern. Math. Research Notices, 12, 591-635, (1995)
- [4] Victor V. Batyrev, Yuri Tschinkel, Manin's conjecture for toric varieties. J. Algebraic Geom. 7 (1998), no. 1, 15-53
- [5] Timothy D. Browning, The divisor problem for binary cubic forms. J. Théor. Nombres Bordeaux 23 (2011), no. 3, 579-602.
- [6] Timothy D. Browning, Quantitative arithmetic of projective varieties. Progress in Mathematics 277. Birkhäuser, Basel. xi, 160 p. (2009).
- [7] Régis de la Bretèche, Timothy D. Browning, Le problème des diviseurs pour des formes binaires de degré 4. J. Reine Angew. Math. 646 (2010), 1-44.
- [8] Régis de la Bretèche, Timothy D. Browning, Manin's conjecture for quartic del Pezzo surfaces with a conic fibration. Duke Math. J. 160 (2011), no. 1, 1-69.
- [9] Cassels, J.W.S. An introduction to the geometry of numbers. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Bd. 99. Berlin-Göttingen-Heidelberg : Springer-Verlag. viii, 344 pp. (1959).
- [10] G. V. Chudnovsky, On the method of Thue-Siegel. Ann. of Math. (2) 117 (1983), no. 2, 325-382.
- [11] Lejeune-Dirichlet P.-G. Sur une propriété des formes quadratiques à déterminant positif. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. Paris. 1, (1856) 76-79.
- [12] William Fulton, Introduction to toric varieties. Annals of Mathematics Studies. 131. Princeton, NJ : Princeton University Press. xi, 157 p. (1993).

- [13] Roger Heath-Brown, Diophantine approximation with square-free numbers. *Math. Z.* **187**, 335-344 (1984).
- [14] Zhizhong Huang, Distribution locale des points rationnels de hauteur bornée sur une surface de del Pezzo de degré 6. À paraître dans *Int. J. Number Theory*. arXiv :1610.02542.
- [15] A. Ya. Khintchine, Continued fractions. Translated by Peter Wynn. P. Noordhoff, Ltd., Groningen 1963 iii+101 pp.
- [16] L. Kuipers, H. Niederreiter, Uniform distribution of sequences. Pure and Applied Mathematics. Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York-London-Sydney, 1974. xiv+390 pp.
- [17] Serge Lang, Asymptotic approximations to quadratic irrationalities. I, II. *Amer. J. Math.* **87** (1965), 481-487; *ibid.* 488-496.
- [18] David McKinnon, *A conjecture on rational approximations to rational points*, *J. Algebraic Geom.* **16** (2007), 257-303.
- [19] David McKinnon, Mike Roth, *Seshadri constants, Diophantine approximation, and Roth's theorem for arbitrary varieties*, *Invent. Math.* **200** (2), (2015) 513-583.
- [20] S. Pagelot, *Étude de la distribution asymptotique fine des points rationnels de hauteur bornée*, Manuscrit non-publié.
- [21] Emmanuel Peyre, Hauteurs et mesures de Tamagawa sur les variétés de Fano. *Duke Math. J.* **79** (1995), no. 1, 101-218.
- [22] Emmanuel Peyre, Points de hauteur bornée, topologie adélique et mesures de Tamagawa. *J. Théor. Nombres Bordx.* **15**, No. 1, 319-349 (2003).
- [23] Per Salberger, Tamagawa measures on universal torsors and points of bounded height on Fano varieties. *Nombre et répartition de points de hauteur bornée. Astérisque No. 251* (1998), 91-258.
- [24] Pierre Samuel, *Théorie algébrique des nombres*. Hermann, Paris 1967 130 pp.
- [25] Gérard Tenenbaum, Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres. Cours Spécialisés 1. Société Mathématique de France, Paris, 1995. xv+457 pp.